ЗАДАНИЕ К1-00

Дано: уравнения движения точки в плоскости xy: $x = 2 - 3\cos\frac{\pi t}{6}$, $y = 12\sin\frac{\pi t}{6}$; $t_1 = 1$ с.

Найти: уравнение траектории точки; скорость и ускорение, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны траектории в момент $t = t_1$.

РЕШЕНИЕ:

1. Уравнение траектории.

Для определения уравнения траектории точки исключим время t из заданных уравнений движения.

Воспользуемся свойством тригонометрических функций $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Тогда $\left(\sin\frac{\pi t}{6}\right)^2 = \frac{y^2}{144}$, $\left(\cos\frac{\pi t}{6}\right)^2 = \frac{(2-x)^2}{9}$ и $\frac{(2-x)^2}{9} + \frac{y^2}{144} = 1$.

Это уравнение эллипса с большой полуосью равной 12 см. и малой – 3 см.

2. Скорость точки.

Скорость найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{6},\ v_y = \frac{dy}{dt} = 2\pi\cos\frac{\pi t}{6}.$$

При $t = t_1$=1 с

$$v_x = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi\cdot 1}{6} \approx 0{,}78\,(\text{см/с}),\ v_y = 2\pi\cos\frac{\pi\cdot 1}{6} \approx 5{,}44\,(\text{см/с})$$

Модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0{,}78^2 + 5{,}44^2} \approx 5{,}5\,(\text{см/с})$$

3. Ускорение точки.

Находим аналогично:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{12}\pi^2\cos\frac{\pi t}{6},\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{3}\pi^2\sin\frac{\pi t}{6}$$

При $t = t_1$=1 с

$$a_x = \frac{1}{12}\pi^2\cos\frac{\pi\cdot 1}{6} \approx 0{,}71\,(\text{см/с}^2),\ a_y = -\frac{1}{3}\pi^2\sin\frac{\pi\cdot 1}{6} \approx -1{,}64\,(\text{см/с}^2)$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0{,}71^2 + 1{,}64^2} \approx 1{,}79\,(\text{см/с}^2)$$

4. Касательное ускорение.

Используем формулу $a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}$

При $t = t_1$=1 с

$$a_\tau = \frac{0{,}78\cdot 0{,}71 - 5{,}44\cdot 1{,}64}{5{,}5} \approx -1{,}52\,(\text{см/с}^2)$$

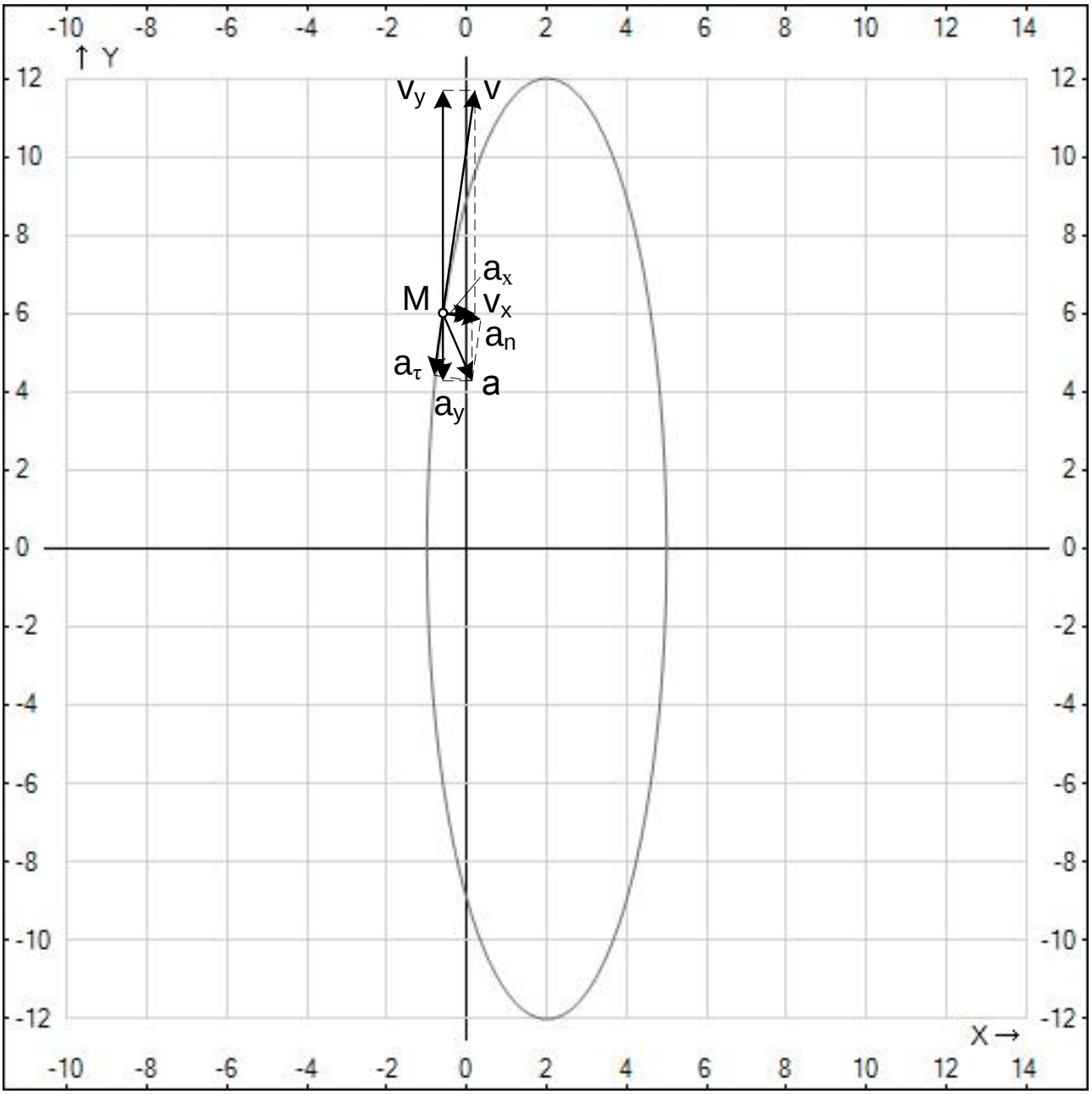
5. Нормальное ускорение.

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{1{,}79^2 - 1{,}52^2} \approx 0{,}95\,(\text{см/с}^2)$$

6. Радиус кривизны траектории.

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5{,}5^2}{0{,}95} \approx 31{,}8\,(\text{см})$$

v	a	a_τ	a_n	ρ
см/с	см/с^2			см
5,5	1,79	–1,52	0,95	31,8



www.targ.stig85.ru