

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

---

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
ПО ВЫШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

для студентов-заочников строительных,  
транспортных, машиностроительных  
и приборостроительных специальностей  
высших учебных заведений

*См. число кафедр*



ВЫСШАЯ ШКОЛА 1982

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

---

*Утверждено  
Учебно-методическим управлением  
по высшему образованию*

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

для студентов-заочников строительных,  
транспортных, машиностроительных  
и приборостроительных специальностей  
высших учебных заведений

*Издание третье*

ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. С. М. ТАРГА



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1982

**ББК 22.21**

**Т 33**

**УДК 531,8**

T-33 **Теоретическая механика: Методические указания и конт-  
рольные задания для студентов-заочников строительных, транс-  
портных, машиностроительных и приборостроительных специ-  
альностей высших учебных заведений**/Котова Л. И., Надеев-  
ва Р. И., Тарг С. М., Цывильский В. Л., Шмарова И. М. Под  
ред. С. М. Тарга.—3-е изд.—М.: Высш. школа. 1982.—111 с.

20 к.

**ББК 22.21**

**531**

© Издательство «Высшая школа», 1978  
© Издательство «Высшая школа», 1982, с изменениями

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику.

1. Для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса, начиная со статики, широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) и аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведение двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике — дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики надо совершенно свободно уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы геометрии кривых 2-го порядка, изучаемой в аналитической геометрии.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (недоказанные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

2 При изучении материала курса по учебнику нужно прежде всего уяснить существование каждого излагаемого там вопроса. Главное — это понять изложенное в учебнике, а не «заучить».

Изучать материал рекомендуется по темам (пунктам приводимой ниже программы) или по главам (параграфам) учебника. Сначала следует прочитать весь материал темы (параграфа), особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным; часто это становится понятным из последующего. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения, и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, теорем и т. п. (они обычно бывают набраны в учебнике курсивом или разрядкой); в точных формулировках, как правило, бывает существенно каждое слово и очень полезно понять, почему данное положение сформулировано именно так. Однако не следует стараться заучивать формулировки; важно понять их смысл и уметь изложить результат своими словами.

Необходимо также понять ход всех доказательств (в механике они обычно не сложны) и разобраться в их деталях. Доказательства надо уметь воспроизводить самостоятельно, что иструдно сделать, поняв идею доказательства; пытаться просто их «заучивать» не следует, никакой пользы это не принесет.

Закончив изучение темы, полезно составить краткий конспект, по возможности не заглядывая в учебник.

При изучении курса особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив материал данной темы, надо сначала обязательно разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению. Затем постараитесь решить самостоятельно несколько аналогичных задач из сборника задач И. В. Мещерского и после этого решите соответствующую задачу из контрольного задания.

3. Закончив изучение темы, нужно проверить, можете ли выдать ответ на все вопросы программы курса по этой теме (осуществить самопроверку).

Поскольку все вопросы, которые должны быть изучены и усвоены, в программе перечислены достаточно подробно, дополнительные вопросы для самопроверки здесь не приводятся. Однако очень полезно составить перечень таких вопросов самостоятельно (в отдельной тетради) следующим образом.

Начав изучение очередной темы программы, выпишать сначала в тетради последовательно все перечисленные в программе вопросы этой темы, оставив справа широкую колонку (поле). При этом, если, например, в программе сказано «Условия равновесия пространственной и плоской систем сходящихся сил», то следует записать отдельно вопросы «Условия равновесия пространственной системы сходящихся сил» и «Условия равновесия плоской системы сходящихся сил» и т. п.

Затем по мере изучения материала темы (чтения учебника) следует в правой колонке указать страницу учебника, на которой излагается соответствующий вопрос, а также номер формулы или уравнения (уравнений), которые выражают ответ на вопрос математически. В результате в данной тетради будет полный перечень вопросов для самопроверки, который можно использовать и при подготовке к экзамену. Кроме того, ответив на вопрос или написав соответствующую формулу (уравнение), вы можете по учебнику быстро проверить, правильно ли это сделано, если в правильности своего ответа сомневаетесь. Наконец, по тетради с такими вопросами вы можете установить, весь ли материал, предусмотренный программой, вам изучен (если изучен весь материал, то против каждого вопроса в правой колонке будет указана соответствующая страница учебника).

Следует иметь в виду, что в различных учебниках материал может излагаться в разной последовательности. Поэтому ответ на какой-нибудь вопрос данной темы может оказаться в другой главе учебника. Например, в статике теорема о приведении системы сил к центру может быть дана сразу для произвольной системы сил (как указано в программе), а может быть дана сначала для плоской системы сил, а потом для произвольной и т. п.

Таким образом, изучая материал по одному из рекомендованных учебников, вы можете сначала получить ответы только на часть вопросов какой-нибудь темы, а ответы на остальные вопросы этой

темы получить позже. Конечно, на изучении курса в целом это никак не скажется.

Указания по выполнению контрольных заданий приводятся ниже (после рабочей программы). Их надо прочитать обязательно и ими руководствоваться. Кроме того, к каждой задаче даются конкретные методические указания по ее решению и приводится пример решения.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА \*

**Введение.** Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники. Объективный характер законов механики. Основные исторические этапы развития механики.

### СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Основные понятия и аксиомы статики.** Предмет статики. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные системы сил, равнодействующая, уравновешенная система сил, силы внешние и внутренние. Аксиомы статики. Связи и реакции связей. Основные виды связей: гладкая плоскость, поверхность и опора, гибкая нить, цилиндрический шарнир (подшипник), сферический шарнир (подпятник), невесомый стержень; реакции этих связей.

**Система сходящихся сил.** Геометрический и аналитический способы сложения сил. Сходящиеся силы. Равнодействующая сходящихся сил. Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил. Аналитические условия равновесия пространственной и плоской систем сходящихся сил. Теорема о равновесии трех непараллельных сил.

**Теория пар сил.** Момент силы относительно точки (центра) как вектор. Пара сил. Момент пары сил как вектор. Теорема о сумме моментов сил, образующих пару, относительно любого центра. Теоремы об эквивалентности пар. Сложение пар, произвольно расположенных в пространстве. Условия равновесия системы пар.

**Приведение произвольной системы сил к данному центру.** Теорема о параллельном переносе силы. Основная теорема статики о приведении системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент системы сил.

**Система сил, произвольно расположенных на плоскости (плоская система сил).** Алгебраическая величина момента силы. Вычисление главного вектора и главного момента плоской системы сил. Частные случаи приведения плоской системы сил: приведение к па-

\* Составлена на основе Программы по теоретической механике инд. УМУ-24/1, утвержденной Учебно-методическим управлением по высшему образованию 18 февраля 1976 г. По решению кафедры для отдельных специальностей в рабочую программу могут включаться дополнительные вопросы, перечень которых должен быть сообщен студентам.

ре сил, к равнодействующей и случай равновесия. Аналитические условия равновесия плоской системы сил. Три вида условий равновесия: а) равенство нулю сумм проекций сил на две координатные оси и суммы их моментов относительно любого центра; б) равенство нулю сумм моментов сил относительно двух центров и суммы их проекций на одну ось; в) равенство нулю сумм моментов сил относительно трех центров. Условия равновесия плоской системы параллельных сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Сосредоточенные и распределенные силы. Силы, равномерно распределенные по отрезку прямой, и их равнодействующая. Реакция жесткой заделки. Равновесие системы тел. Статически определимые и статически неопределенные системы. Равновесие при наличии сил трения. Коэффициент трения. Предельная сила трения. Угол и конус трения.

**Система сил, произвольно расположенных в пространстве (пространственная система сил).** Момент силы относительно оси и его вычисление. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр. Аналитические формулы для вычисления моментов силы относительно трех координатных осей. Вычисление главного вектора и главного момента пространственной системы сил. Частные случаи приведения пространственной системы сил: приведение к паре сил, к равнодействующей, к динамическому винту и случай равновесия. Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Условия равновесия пространственной системы параллельных сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси.

**Центр параллельных сил и центр тяжести.** Центр параллельных сил. Формулы для определения координат центра параллельных сил. Центр тяжести твердого тела; формулы для определения его координат. Координаты центров тяжести однородных тел (центры тяжести объема, площади и линии). Способы определения положения центров тяжести тел. Центры тяжести дуги окружности, треугольника и кругового сектора.

## КИНЕМАТИКА

**Введение в кинематику.** Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

**Кинематика точки.** Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Скорость точки как производная ее радиуса-вектора по времени. Ускорение точки как производная ее вектора скорости по времени.

Координатный способ задания движения точки (в прямоугольных декартовых координатах). Определение траектории точки. Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси.

Естественный способ задания движения точки. Естественный трехгранник. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трехгранника; касательное и нормальное ускорения точки. Равномерное и равнопеременное криволинейные движения точки; законы этих движений.

## Кинематика твердого тела

**Поступательное движение.** Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении.

**Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (вращательное движение).** Уравнение (или закон) вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Законы равномерного и равнoperеменного вращений. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Выражение скорости точки вращающегося тела и ее касательного и нормального ускорений в виде векторных произведений.

**Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела.** Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Независимость угловой скорости и углового ускорения фигуры от выбора полюса. Определение скорости любой точки плоской фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Теорема о просекциях скоростей двух точек фигуры (тела). Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Определение ускорения любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Понятие о мгновенном центре ускорений.

**Движение твердого тела вокруг неподвижной точки (сферическое движение).** Углы Эйлера. Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Мгновенная ось вращения тела. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку.

**Общий случай движения свободного твердого тела.** Уравнения движения свободного твердого тела. Разложение этого движения на поступательное движение вместе с полюсом и движение вокруг полюса. Определение скоростей и ускорений точек свободного твердого тела.

**Сложное движение точки и твердого тела (составное движение).** Абсолютное и относительное движения точки; переносное движение. Относительная, переносная и абсолютная скорости и относительное, переносное и абсолютное ускорения точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений. Модуль и направление кориолисова ускорения. Случай поступательного переносного движения.

**Сложное движение твердого тела.** Сложение поступательных движений. Сложение мгновенных вращений твердого тела вокруг пересекающихся и параллельных осей. Пара мгновенных вращений. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось.

## ДИНАМИКА

**Введение в динамику.** Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Силы, зависящие от

времени, от положения точки и от ее скорости. Законы механики Галилея—Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

## Динамика точки

**Решение первой и второй задач динамики.** Дифференциальные уравнения движений свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах. Естественные уравнения движения точки (уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника).

Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение первой задачи динамики.

**Решение второй задачи динамики. Начальные условия.** Постоянны интегрирования и их определение по начальным условиям. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения точки в случаях силы, зависящей от времени, от положения (координат) точки и от ее скорости.

**Несвободное и относительное движение точки.** Несвободное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения движения точки по заданной гладкой неподвижной кривой. Определение закона движения и реакции связи.

**Относительное движение материальной точки.** Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки; переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

**Прямолинейные колебания точки.** Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию от центра колебаний. Амплитуда, начальная фаза, частота и период колебаний. Затухающие колебания материальной точки при сопротивлении, пропорциональном скорости; период этих колебаний, декремент колебаний. Апериодическое движение.

**Вынужденные колебания материальной точки** при действии гармонической возмущающей силы и сопротивлении, пропорциональном скорости; случай отсутствия сопротивления. Амплитуда вынужденных колебаний и сдвиг фаз, их зависимость от отношения частот; коэффициент динамичности. Явление резонанса.

**Введение в динамику механической системы.** Механическая система. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс; радиус-вектор и координата центра масс.

**Моменты инерции.** Момент инерции твердого тела относительно оси; радиус инерции. Моменты инерции тела относительно плоскости и полюса. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса). Примеры вычисления моментов инерции (моменты инерции однородного тонкого стержня, тонкого круглого кольца или полого цилиндра и круглого диска или сплошного круглого цилиндра). Формула для вычисления момента инерции относительно оси любого направления. Центробежные моменты инерции. Главные и главные центральные оси инерции и их свойства.

## Общие теоремы динамики

**Теорема о движении центра масс.** Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

**Теорема об изменении количества движения.** Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени и его проекции на координатные оси. Теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной и конечной формах.

Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы.

Понятие о теле и точке переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Цюлковского.

**Теорема об изменении момента количества движения.** Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Центральная сила. Сохранение момента количества движения материальной точки в случае центральной силы. Понятие о секторной скорости. Закон площадей.

Главный момент количества движения или кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента механической системы. Теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс.

**Теорема об изменении кинетической энергии.** Кинетическая энергия материальной точки. Элементарная работа силы; аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения. Мощность. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной и конечной формах.

Кинетическая энергия механической системы. Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и в общем случае движения (в частности, при плоскопараллельном движении). Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной и конечной формах. Равенство пулю суммы работ внутренних сил в твердом теле. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

Понятие о силовом поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Выражение проекций силы через силовую функцию. Поверхности равного потенциала. Работа силы на конечном перемещении точки в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия. Примеры потенциальных силовых полей: однородное поле тяжести и поле тяготения. Закон сохранения механической энергии.

**Динамика твердого тела.** Дифференциальные уравнения посту-

пательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

**Принцип Даламбера.** Сила инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Приведение сил инерции точек твердого тела к центру; главный вектор и главный момент сил инерции.

Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Случай, когда ось вращения является главной центральной осью инерции тела.

**Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики.** Связи, налагаемые на механическую систему. Возможные (или виртуальные) перемещения материальной точки и механической системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

**Уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа).** Обобщенные координаты системы; обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление; случай сил, имеющих потенциал. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода. Уравнение Лагранжа в случае потенциальных сил; функция Лагранжа (кинетический потенциал).

Понятие об устойчивости равновесия. Малые свободные колебания механической системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия системы и их свойства.

**Элементы теории удара.** Явление удара. Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе. Прямой центральный удар тела о неподвижную поверхность; упругий и неупругий удары. Коэффициент восстановления при ударе и его опытное определение. Прямой центральный удар двух гел. Теорема Карно.

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

**Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р.** Курс теоретической механики. Т. 1, 2. М., 1970, 1971 и последующие издания.

**Воронков И. М.** Курс теоретической механики. М., 1954 и последующие издания.

**Добронравов В. В., Никитин Н. П., Дворников А. Л.** Курс теоретической механики. М., 1966 и последующие издания.

**Тарг С. М.** Краткий курс теоретической механики. 3-е изд. М., 1963 и последующие издания.

**Яблонский А. А., Никифорова В. М.** Курс теоретической механики. Ч. 1. М., 1962 и последующие издания.

**Яблонский А. А.** Курс теоретической механики. Ч. 2. М., 1962 и последующие издания.

**Мещерский И. В.** Сборник задач по теоретической механике. М., 1952 и последующие издания.

## **Дополнительная**

**Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осепский В. М.** Руководство к решению задач по теоретической механике. М., 1965 и последующие издания.

**Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. 1, 2. М., 1961 и последующие издания.

**Бражников Н. А., Кан В. Л., Минцберг Б. Л., Морозов В. И., Ушакова Г. Н.** Сборник задач по теоретической механике М., 1967.

**Гернет М. М.** Курс теоретической механики. М., 1970 и последующие издания.

Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике/Под ред. А. А. Яблонского. М., 1972 и последующие издания. (Содержит примеры решения задач.)

## **КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ**

### **СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ**

Студенты выполняют 5 контрольных заданий (работ).

Задание 1 (статика) — задачи С1—С5.

Задание 2 (кинематика) — задачи К1—К4.

Задание 3 (динамика) — задачи Д1—Д4.

Задание 4 (динамика) — задачи Д5—Д8.

Задание 5 (динамика) — задачи Д9—Д12.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С1.4 это рис. 4 к задаче С1 и т. д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т. д.). Номера условий от 0 до 9 приведены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице — по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач и год издания контрольных заданий.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на чистой странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и

что требуется определить (текст задачи не переписывать). Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получается более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывая все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывая единицы получаемых величин **нужно обязательно**. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и **подробно излагать весь ход расчетов**. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

**Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.**

К работе, высыпаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

На экзамене необходимо представить зачетные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учтеть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам С1—С5 и Д1—Д12 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам—вертикальными и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, трясины) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице  $P_1, l_1, r_1$  и т. п. означают вес или размеры тела 1;  $P_2, l_2, r_2$  — тела 2 и т. д. Аналогично в кинематике и динамике  $v_B, a_B$  означают скорость и ускорение точки  $B$ ;  $v_C, a_C$  — точки  $C$ ;  $\omega_1, \varepsilon_1$  — угловую скорость и угловое ускорение тела 1;  $\omega_2, \varepsilon_2$  — тела 2 и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после ее текста под рубрикой «Указания»; затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера—разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

# ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

## СТАТИКА

### Задача С1

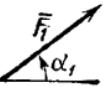
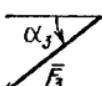
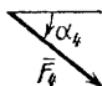
Жесткая рама (рис. С1. 0—С1.9, табл. С1) закреплена в точке *A* шарнирно, а в точке *B* прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке *C* к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом  $P=25$  кН. На раму действует пара сил с моментом  $M=60$  кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действуют сила  $F_2$  под углом  $15^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке *D*, и сила  $\bar{F}_3$  под углом  $60^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке *E* и т. д.).

Определить реакции связей в точках *A*, *B*, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять  $a=0,5$  м.

**Указания.** Задача С1 — на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы  $\bar{F}$  часто удобно разложить ее на составляющие  $\bar{F}'$  и  $\bar{F}''$ , для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Варниона; тогда  $m_o(\bar{F}) = m_o(\bar{F}') + -m_o(\bar{F}'')$ .

Таблица С1

Силы								
	$F_1=10$ кН	$F_2=20$ кН	$F_3=30$ кН	$F_4=40$ кН				
Номер условия	Точка приложения	$\alpha_1$ , град	Точка приложения	$\alpha_2$ , град	Точка приложения	$\alpha_3$ , град	Точка приложения	$\alpha_4$ , град
0	<i>H</i>	30	—	—	—	—	<i>K</i>	60
1	—	—	<i>D</i>	15	—	—	—	—
2	<i>K</i>	75	—	—	—	—	<i>E</i>	30
3	—	—	<i>K</i>	60	—	—	<i>H</i>	—
4	<i>D</i>	30	—	—	—	—	—	60
5	—	—	<i>H</i>	30	—	—	—	75
6	<i>E</i>	60	—	—	<i>K</i>	15	—	—
7	—	—	<i>D</i>	60	—	—	<i>D</i>	—
8	<i>H</i>	60	—	<i>E</i>	75	—	<i>H</i>	15
9	—	—	—	—	<i>K</i>	30	—	—

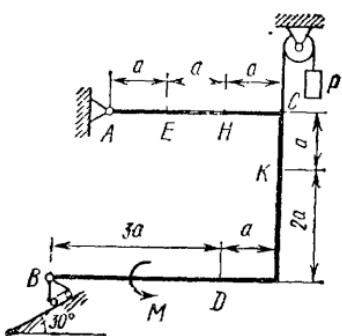


Рис. С1.0

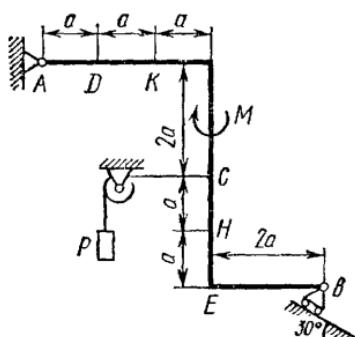


Рис. С1.1

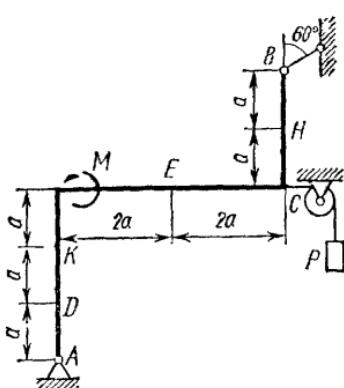


Рис. С1.2

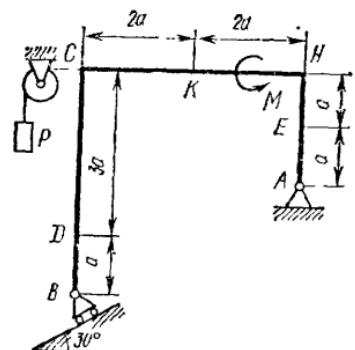


Рис. С1.3

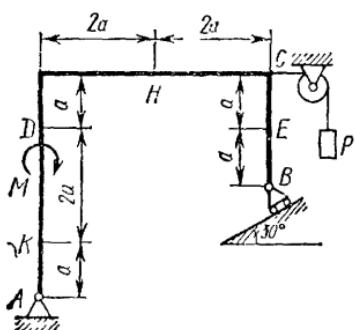


Рис. С1.4

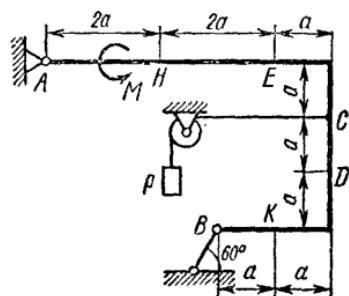


Рис. С1.5

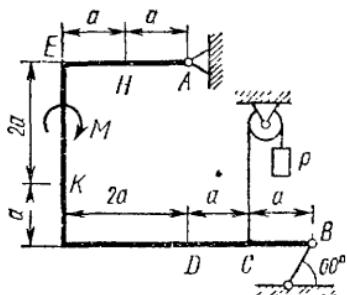


Рис. С1.6

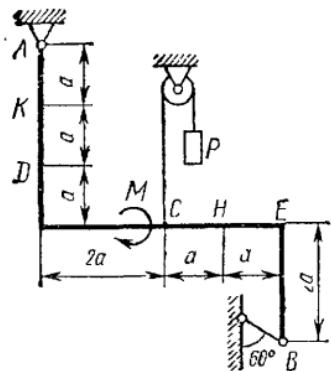


Рис. С1.7

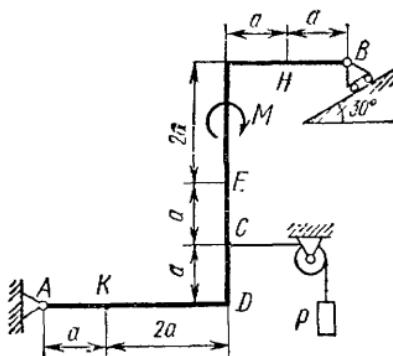


Рис. С1.8

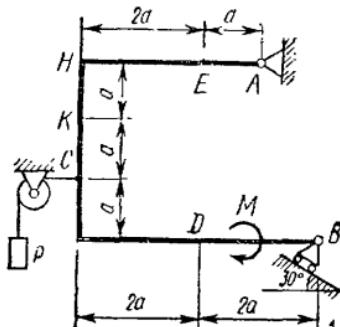


Рис. С1.9

**Пример С1.** Жесткая пластина  $ABCD$  (рис. С1) имеет в точке  $A$  неподвижную шарнирную опору, а в точке  $B$ —подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано:  $F=25$  кН,  $a=60^\circ$ ,  $P=18$  кН,  $\gamma=75^\circ$ ,  $M=30$  кН·м,  $\beta=30^\circ$ ,  $a=0,5$  м. Определить: реакции в точках  $A$  и  $B$ , вызываемые действующими нагрузками.

**Решение.** 1. Рассмотрим равновесие пластины. Приведем координатные оси  $xy$  и изобразим действующие на пластину силы: силу  $\bar{F}$ , пару сил с моментом  $M$ , напряжение троса  $\bar{T}$  (по модулю  $T=F$ ) и реакции свя-

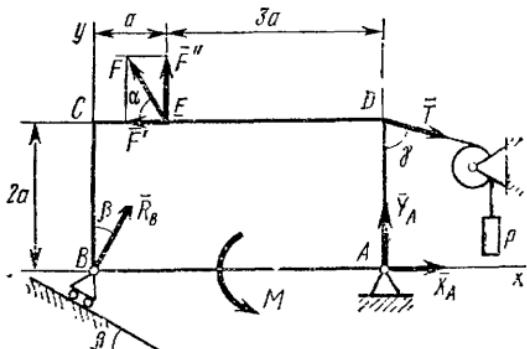


Рис С1

зей  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{R}_B$  (реакцию неподвижной шарнирной опоры  $A$  изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы  $\bar{F}$  относительно точки  $A$  воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу  $\bar{F}$  на составляющие  $\bar{F}'$ ,  $\bar{F}''$  ( $F' = F \cos \alpha$ ,  $F'' = F \sin \alpha$ ) и учтем, что  $m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') + m_A(\bar{F}'')$ . Получим:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B \sin \beta - F \cos \alpha + T \sin \gamma = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \cos \beta + F \sin \alpha - T \cos \gamma = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad M - R_B \cos \beta \cdot 4a + F \cos \alpha \cdot 2a - F \sin \alpha \cdot 3a - \\ - T \sin \gamma \cdot 2a = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции. Ответ:  $X_A = -8,5$  кН;  $Y_A = -23,3$  кН;  $R_B = 7,3$  кН. Знаки указывают, что силы  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$  направлены противоположно показанным на рис. С1.

## Задача С2

Конструкция состоит из жесткого уголника и стержня, которые в точке  $C$  или соединены друг с другом шарнирно (рис. С2.0—С2.5), или свободно опираются друг о друга (рис. С2.6—С2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке  $A$  или шарнир, или жесткая заделка; в точке  $B$  или невесомый стержень  $BB'$  (рис. 0 и 1), или гладкая плоскость (рис. 2 и 3), или шарнир (рис. 4—9); в точке  $D$  или невесомый стержень  $DD'$  (рис. 1, 2, 7), или шарнирная опора на катках (рис. 9).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом  $M = 60$  кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q = 20$  кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. С2; там же в столбце «Участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила  $\bar{F}_2$  под углом  $60^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $L$ , сила  $\bar{F}_4$  под углом  $30^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $E$ , и нагрузка, распределенная на участке  $CK$ ).

Определить реакции связей в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (для рис. 1, 2, 7, 9 еще и в точке  $D$ ), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять  $a = 0,2$  м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. С2а.

**Указания.** Задача С2—на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем— равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел

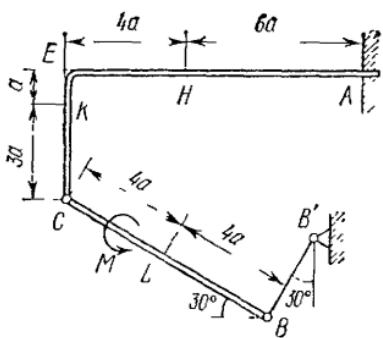
в отдельности, учитя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

Таблица С2

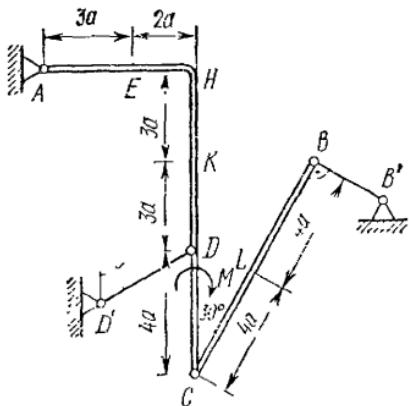
Сила					Участок				
	$F_1 = 10 \text{ кН}$	$F_2 = 20 \text{ кН}$	$F_3 = 30 \text{ кН}$	$F_4 = 40 \text{ кН}$					
Номер условия	Точка приложения	$\alpha_1, \text{град}$	Точка приложения	$\alpha_2, \text{град}$	Точка приложения				
					$\alpha_3, \text{град}$				
0	$K$	60	—	—	$H$	30	—	—	$CL$
1	—	—	$L$	60	—	—	$E$	30	$CK$
2	$L$	15	—	—	$K$	60	—	—	$AE$
3	—	—	$K$	30	—	—	$H$	60	$CL$
4	$L$	30	—	—	$E$	60	—	—	$CK$
5	—	—	$L$	75	—	—	$K$	30	$AE$
6	$E$	60	—	—	$K$	75	—	—	$CL$
7	—	—	$H$	60	—	—	$E$	—	$CK$
8	—	—	$K$	30	—	—	$L$	15	$CL$
9	$H$	30	—	—	—	—	$L$	60	$CK$

Таблица С2а

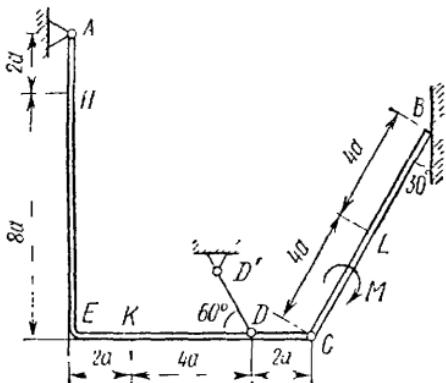
Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. 1, 2, 4, 7, 9	рис. 0, 3, 5, 6, 8



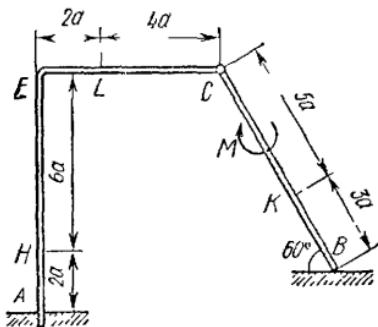
Pic. C2.0



Pic. C2.1



Pic. C2.2



Pic. C2.3

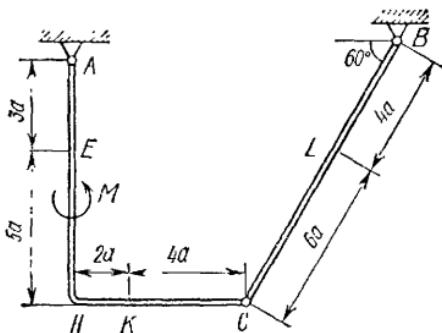


Рис. С2.4

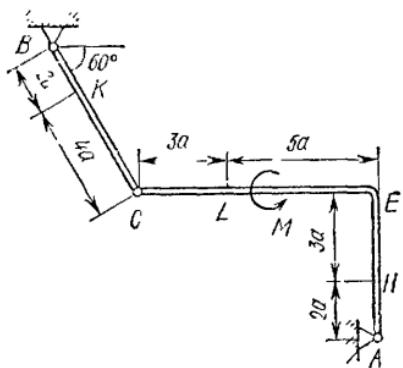


Рис. С2.5

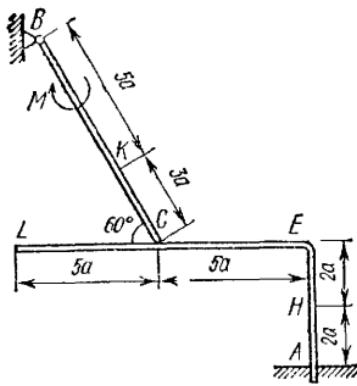


Рис. С2.6

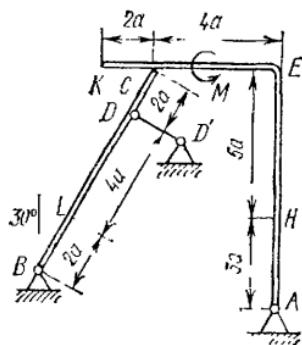


Рис. С2.7

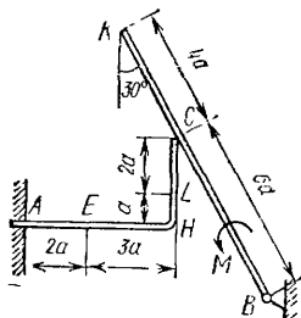


Рис. С2.8

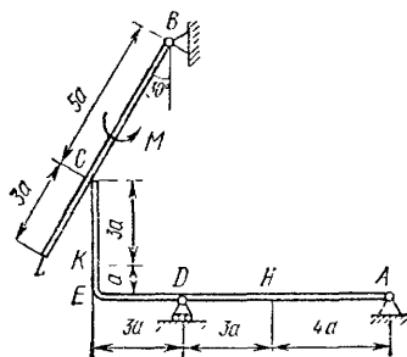
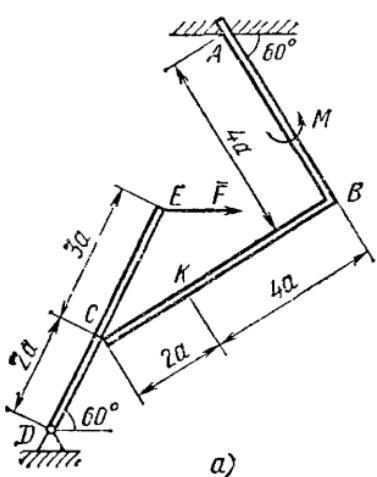


Рис. С2.9

**Пример С2.** На угольник  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ), конец  $A$  которого жестко заделан, в точке  $C$  опирается стержень  $DE$  (рис. С2, а).



а)

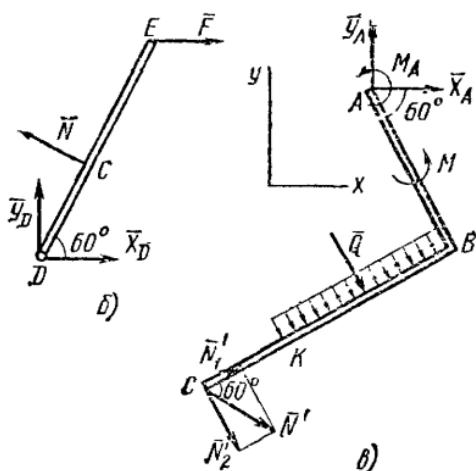


Рис. С2

Стержень имеет в точке  $D$  неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила  $\bar{F}$ , а к угольнику—равномерно распределенная на участке  $KB$  нагрузка интенсивности  $q$  и пара с моментом  $M$ .

Дано:  $F=10$  кН,  $M=5$  кН·м,  $q=20$  кН/м,  $a=0,2$  м. Определить: реакции в точках  $A$ ,  $C$ ,  $D$ , вызванные заданными нагрузками.

Решение. 1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня  $DE$  (рис. С2, б). Проведем координатные оси  $xy$  и изобразим действующие на стержень силы: силу  $\bar{F}$ , реакцию  $\bar{N}$ , направленную перпендикулярно стержню, и составляющие  $\bar{X}_D$  и  $\bar{Y}_D$  реакции шарнира  $D$ . Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad X_D + F - N \sin 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad Y_D + N \cos 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma m_D (\bar{F}_k) = 0, \quad N \cdot 2a - F \cdot 5a \sin 60^\circ = 0. \quad (3)$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. С2, в). На него действуют сила давления стержня  $\bar{N}'$ , направленная противоположно реакции  $\bar{N}$ , равномерно распределенная нагрузка, которую заменим силой  $\bar{Q}$ , приложенной в середине участка  $KB$  (численно  $Q=q \cdot 4a=16$  кН), пара сил с моментом  $M$  и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ , и пары с моментом  $M_A$ . Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad X_A + Q \cos 60^\circ + N' \sin 60^\circ = 0; \quad (4)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad Y_A - Q \sin 60^\circ - N' \cos 60^\circ = 0; \quad (5)$$

$$\Sigma m_A (\bar{F}_k) = 0, \quad M_A + M - Q \cdot 2a + N' \cos 60^\circ \cdot 4a + N' \cos 30^\circ \cdot 6a = 0. \quad (6)$$

При вычислении момента силы  $\bar{N}'$  разлагаем ее на составляющие  $\bar{N}'_1$  и  $\bar{N}'_2$  и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (1)–(6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно  $N'=N$  в силу равенства действия и противодействия. Ответ:  $N=21,7$  кН,  $Y_D=-10,8$  кН;  $X_D=8,8$  кН,  $X_A=-26,8$  кН,  $Y_A=24,7$  кН,  $M_A=-42,6$  кН·м.

Знаки указывают, что силы  $\bar{Y}_D$ ,  $\bar{X}_A$  и момент  $M_A$  направлены противоположно показанным на рисунках.

### Задача С3

Однородный стержень весом  $P=24$  Н прикреплен шарнирно к невесомым ползунам 1 и 2 (рис. С3. 0—С3.9, табл. С3). Коэффициенты трения ползунов о направляющие, вдоль которых они мо-

гут скользить, равны соответственно  $f_1$  и  $f_2$ . К ползунам приложены силы  $Q_1$  и  $Q_2$ , показанные на рисунках. Механизм расположен в вертикальной плоскости.

Определить величину, указанную в таблице в строке «Найти», где обозначено:  $Q'_1$  (или  $Q'_2$ ) — наименьшее значение силы  $Q_1$  (или  $Q_2$ ), при котором имеет место равновесие;  $Q''_1$  (или  $Q''_2$ ) — наибольшие значения тех же сил, при которых сохраняется равновесие;  $f'_1$  (или  $f'_2$ ) — наименьшее значение коэффициента трения, при котором сохраняется равновесие.

**Указания.** Задача С3 — на равновесие тела под действием плоской системы сил при наличии трения скольжения. При решении задачи следует рассмотреть предельное положение равновесия, когда  $F_{rp}=fN$ . Уравнения равновесия решаются проще, если их составить в виде уравнений моментов относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных сил (вместо одного из таких уравнений можно составить уравнение проекций на ось, перпендикулярную неизвестной силе).

Условие  $f_1=0$  (или  $f_2=0$ ) означает, что ползун 1 (или 2) гладкий; соответствующую силу трения на чертеже не изображать и в уравнения не вводить (введение этой силы, с тем чтобы потом положить  $f=0$ , сильно усложнит решение).

Таблица С3

Номер условия	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Q_1$ , Н	60	—	50	60	—	—	80	60	—	80
$Q_2$ , Н	—	80	60	—	80	100	—	50	100	—
$f'_1$	0	0,15	0	0,2	0	0,2	0	—	0	0,15
$f'_2$	0,2	0	—	0	0,15	0	0,15	0	0,2	0
Найти	$Q'_2$	$Q''_1$	$f'_2$	$Q''_2$	$Q'_1$	$Q'_1$	$Q''_2$	$f'_1$	$Q'_1$	$Q'_2$

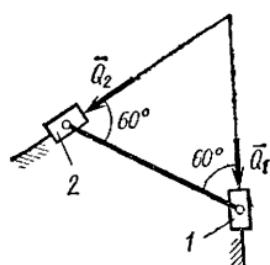


Рис. С3.0

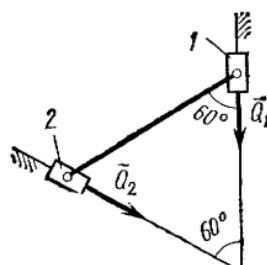


Рис. С3.1

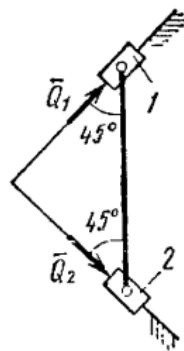


Рис. С3.2

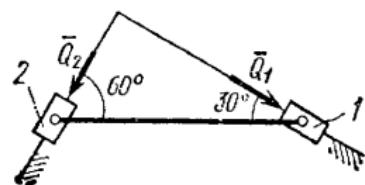


Рис. С3.3

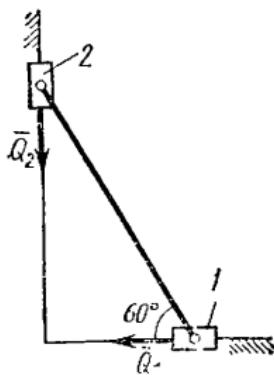


Рис. С3.4

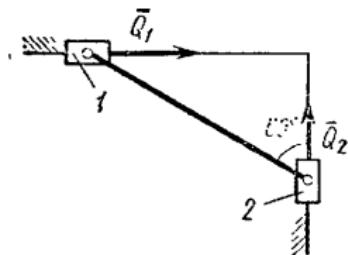


Рис. С3.5

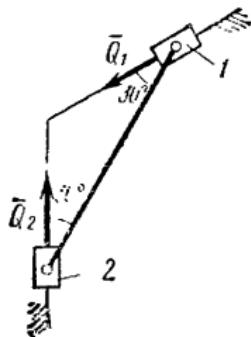


Рис. С3.6

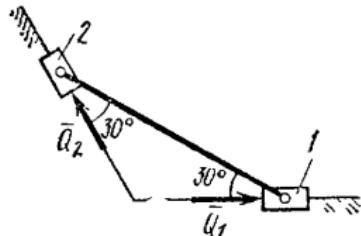


Рис. С3.7

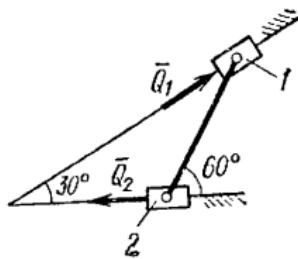


Рис. С3.8

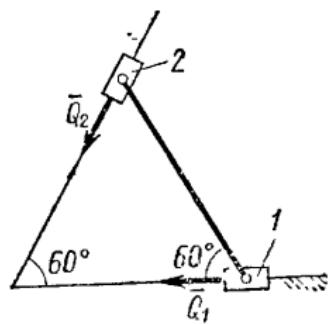


Рис. С3.9

**Пример С3.** Жесткий уголник  $ADB$  весом  $P$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ). расположенный в вертикальной плоскости, прикреплен шарнирами к ползунам 1 и 2 (рис. С3). Линия действия силы  $\bar{P}$  проходит на расстоянии  $h$  от стороны  $AD$ . В середине стороны  $AD$  приложена горизонтальная сила  $Q$ . Коэффициент трения ползуна 1 о направляющие равен  $f_1$ ; ползун 2 гладкий.

Дано:  $P=40$  Н,  $BD=b=0,8$  м,  $h=0,3$  м,  $a=0,2$  м,  $f_1=0,3$ . Угол между направляющими  $120^\circ$ . Определить:  $Q''$  — наибольшее значение силы  $Q$ , при котором сохраняется равновесие.

**Решение.** 1. Рассмотрим предельное равновесие уголника, при котором  $Q=Q''$ . Изображаем действующие на уголник силы  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$ , нормальные реакции  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  и предельную силу трения  $\bar{F}_{tr}$ , приложенную к ползуну 1.

То, что сила  $\bar{Q}$  имеет наибольшее возможное числовое значение, означает, что при ее дальнейшем увеличении равновесие нарушится и под действием силы  $\bar{Q}$  ползун 1 начнет скользить влево, а ползун 2 — вверх. Следовательно, при равновесии сила  $\bar{F}_{tr}$ , удерживающая ползун 1 от скольжения влево, направлена вправо (направление силы  $\bar{F}_{tr}$  при решении подобной задачи надо обязательно установить и показать это направление на рисунке верно).

2. Так как сила трения, выражаясь через нормальную реакцию, действует лишь на ползун 1, то реакцию  $N_2$  можно не определять и составить только два уравнения равновесия, в которые  $N_2$  не войдет. Для этого проведем сначала линии действия неизвестных реакций  $\bar{N}_1$  и  $\bar{N}_2$  до их пересечения в точке  $E$  и составим уравнение  $\Sigma m_E(\bar{F}_h)=0$ , в которое  $N_1$  и  $N_2$  не войдут. Получим, полагая  $Q=Q''$ :

$$-Ph + Q''(a+DE) - F_{tr}(2a+DE) = 0, \quad (1)$$

где  $DE=b \cdot \operatorname{tg} 30^\circ=0,46$  м. Тогда при заданных значениях  $h$  и  $a$  уравнение (1) примет вид

$$-0,3P + 0,66Q'' - 0,86F_{tr} = 0,$$

откуда находим

$$F_{tr} = 0,77Q'' - 0,35P \quad (2)$$

Равенство (2) не может дать  $F_{tr} < 0$ , поскольку направление силы  $\bar{F}_{tr}$  было заранее установлено и показано на рис. С3 верно. Следовательно, должно быть

$$0,77Q'' > 0,35P \text{ или } Q'' > 0,45P \quad (3)$$

Для определения  $N_1$  можно составить или уравнение моментов относительно точки, где пересекаются линии действия сил  $\bar{N}_2$  и  $\bar{F}_{tr}$ .

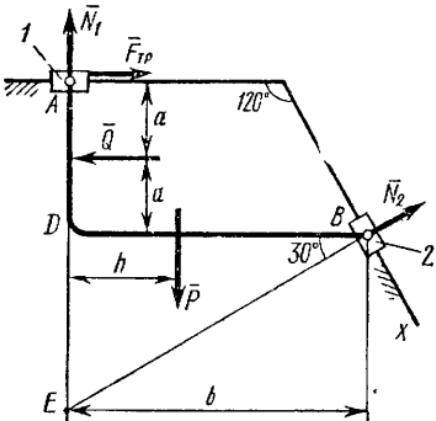


Рис. С3

или уравнение проекций на ось, перпендикулярную  $\bar{N}_2$ . Составим, проведя ось  $Bx$ , уравнение  $\Sigma F_{kx}=0$ . Получим

$$P \cos 30^\circ - Q'' \cos 60^\circ - N_1 \cos 30^\circ + F_{tp} \cos 60^\circ = 0. \quad (4)$$

Отсюда, заменив  $F_{tp}$  его значением (2), найдем окончательно

$$N_1 = 0,80P - 0,13Q'' \quad (5)$$

Для определения  $Q''$  учтем, что когда равновесие является предельным, то  $F_{tp}$  и  $N_1$  связаны соотношением

$$|F_{tp}| = f |N_1|. \quad (6)$$

Подчеркиваем, что в это равенство входят модули сил. В нашем случае  $|F_{tp}| = F_{tp}$ , так как было установлено, что  $F_{tp} > 0$  и дается равенством (2). Но утверждать, что в равенстве (5)  $N_1 > 0$  нет оснований, так как направление  $\bar{N}_1$  может быть и противоположно показанному на рис. С3. Поэтому рассмотрим оба возможных случая:

а)  $N_1 > 0$  (реакция  $\bar{N}_1$  направлена так, как показано на рис. С3). Тогда, подставляя в (6) значения  $F_{tp}$  и  $N_1$  из (2) и (5) и учитя, что  $f = 0,3$ , получим

$$0,77Q'' - 0,35P = 0,3(0,80P - 0,13Q''),$$

откуда находим

$$Q'' = 0,73P = 29,2 \text{ Н.} \quad (7)$$

б)  $N_1 < 0$  (направление  $\bar{N}_1$  противоположно показанному на рис. С3). Тогда  $|N_1| = 0,13 Q'' - 0,80P$  и равенство (6) даст

$$0,77Q'' - 0,35P = 0,3(0,13Q'' - 0,80P),$$

откуда

$$Q'' = 0,15P = 61 \text{ Н.} \quad (8)$$

Из полученных результатов (7) удовлетворяет неравенству (3), а (8) не удовлетворяет. Следовательно, окончательный ответ  $Q'' = 29,2 \text{ Н.}$

**Примечания:** 1. Если в задаче требуется найти наименьшее значение  $Q'$  силы  $\bar{Q}$ , при котором сохраняется равновесие, то это означает, что при дальнейшем уменьшении силы  $\bar{Q}$  она не удержит угольник в равновесии и под действием силы  $\bar{P}$  ползун 2 начнет скользить вниз, а ползун 1 — вправо; следовательно, в этом случае сила  $\bar{F}_{tp}$ , удерживающая ползун 1 от скольжения вправо, будет направлена влево (противоположно показанной на рис. С3). В остальном ход решения остается таким же, как в рассмотренном примере.

2. Если в задаче все действующие силы заданы и надо найти наименьший коэффициент трения  $f'$ , при котором сохраняется равновесие, то силу  $\bar{F}_{tp}$  (как и реакции) можно направлять в любую сторону и, составив уравнения равновесия, аналогичные, например, уравнениям (1) и (4) в рассмотренном примере, найти из них  $F_{tp}$  и  $N_1$ . При этом, поскольку действующие силы заданы, для  $F_{tp}$  и  $N_1$  получаются конкретные числовые значения. Эти значения и следует подставить в равенство (6) и найти из него  $f'$ . Если при расчетах получится  $F_{tp} < 0$  или  $N_1 < 0$ , то это означает лишь, что направление соответствующей силы противоположно показанному на рисунке, но результат не изменится, так как в (6) входят модули сил.

### Задача С4

Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в двух узлах и прикреплены другими концами (тоже шарнирно) к неподвижным опорам  $A, B, C, D$  (рис. С4.0—С4.9, табл. С4). Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах  $H, K, L$  или  $M$  прямоугольного параллелепипеда) на рисунках не показаны и должны быть изображены решающим задачу по данным таблицы. В узле, который в каждом столбце таблицы указан первым, приложена сила  $P=200 \text{ Н}$ ; во втором узле приложена сила  $Q=100 \text{ Н}$ . Сила  $\bar{P}$  образует с положительными направлениями координатных осей  $x, y, z$  углы, равные соответственно  $\alpha_1=45^\circ, \beta_1=60^\circ, \gamma_1=60^\circ$ , а сила  $Q$ —углы  $\alpha_2=60^\circ, \beta_2=45^\circ, \gamma_2=60^\circ$ ; направления осей  $x, y, z$  для всех рисунков показаны на рис. С4. 0.

Границы параллелепипеда, параллельные плоскости  $xy$ ,—квадраты. Диагонали других (боковых) граней образуют с плоскостью  $xy$  угол  $\varphi=60^\circ$ , а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол  $\Theta=51^\circ$ . Определить усилия в стержнях.

На рис. С4.10 в качестве примера показано, как должен выглядеть чертеж С4.3, если по условиям задачи узлы находятся в точках  $L$  и  $M$ , а стержнями являются  $LM, LA, LB; MA, MC, MD$ . Там же показаны углы  $\varphi$  и  $\Theta$ .

**Указания.** Задача С4—на равновесие пространственной системы сходящихся сил. При ее решении следует рассмотреть отдельно равновесие каждого из двух узлов, где сходятся стержни и приложены заданные силы, и учесть закон о равенстве действия и противодействия; начинать с узла, где сходятся три стержня.

Изображать чертеж можно без соблюдения масштаба, так чтобы лучше были видны все шесть стержней. Стержни следует пронумеровать в том порядке, в каком они указаны в таблице; реакции стержней обозначать буквой с индексом, соответствующим номеру стержня (например,  $\bar{N}_1, \bar{N}_2$  и т. д.).

Таблица С4

Номер условия	0	1	2	3	4
Узлы	$H, M$	$L, M$	$K, M$	$L, H$	$K, H$
Стержни	$HM, HA,$ $HB, MA,$ $MC, MD$	$LM, LA,$ $LD, MA,$ $MB, MC$	$KM, KA,$ $KB, MA,$ $MC, MD$	$LH, LC,$ $LD, HA,$ $HB, HC$	$KH, KB,$ $KC, HA,$ $HC, HD$
Номер условия	5	6	7	8	9
Узлы	$M, H$	$L, H$	$K, H$	$L, M$	$K, M$
Стержни	$MH, MB,$ $MC, HA,$ $HC, HD$	$LH, LB,$ $LD, HA,$ $HB, HC$	$KH, KC,$ $KD, HA,$ $HB, HC$	$LM, LB,$ $LD, MA,$ $MB, MC$	$KM, KA,$ $KD, MA,$ $MB, MC$

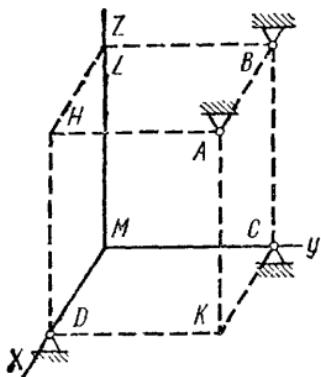


Рис. С4.0

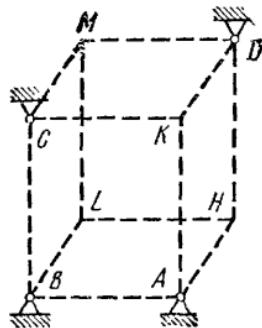


Рис. С4.1

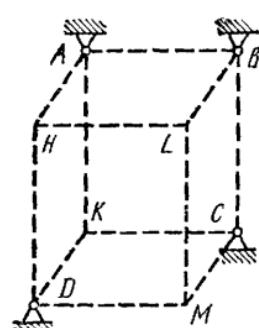


Рис. С4.2

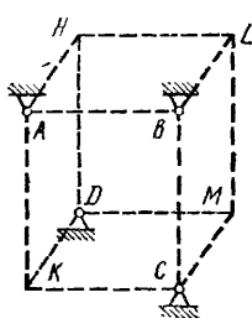


Рис. С4.3

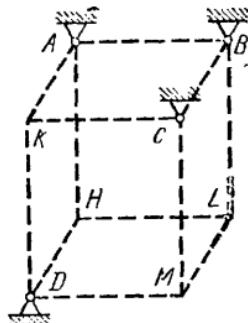


Рис. С4.4

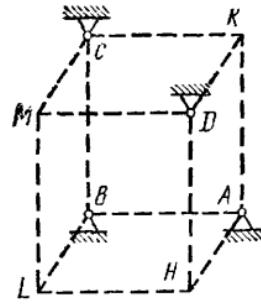


Рис. С4.5

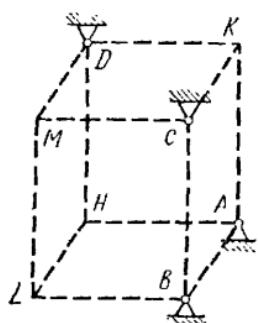


Рис. С4.6

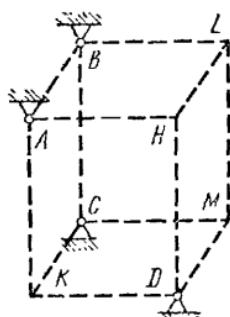


Рис. С4.7

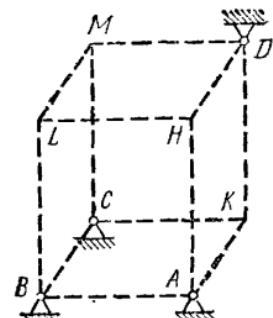


Рис. С4.8

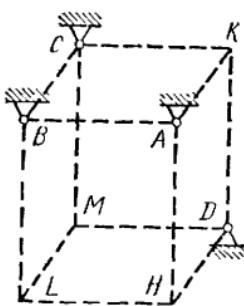


Рис. С4.9

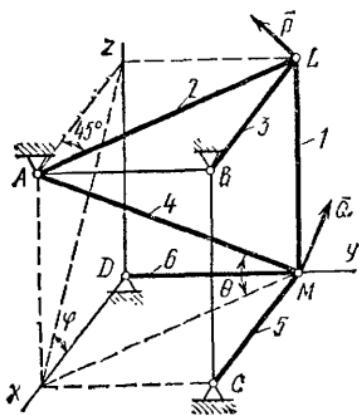


Рис. С4.10

**Пример С4.** Конструкция состоит из несвесомых стержней 1, 2, ..., 6, соединенных друг с другом (в узлах К и М) и с неподвижными опорами А, В, С, Д шарнирами (рис. С4). В узлах К и М приложены силы  $\bar{P}$  и  $\bar{Q}$ , образующие с координатными осями углы  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  и  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  соответственно (на рисунке показаны только углы  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ).

Дано:  $P=100$  Н,  $\alpha_1=60^\circ$ ,  $\beta_1=60^\circ$ ,  $\gamma_1=45^\circ$ ;  $Q=50$  Н,  $\alpha_2=45^\circ$ ,  $\beta_2=60^\circ$ ,  $\gamma_2=60^\circ$ ;  $\psi=30^\circ$ ,  $\phi=60^\circ$ ,  $\delta=74^\circ$ . Определить: усилия в стержнях 1–6.

**Решение.** 1. Рассмотрим равновесие узла К, в котором сходятся стержни 1, 2, 3. На узел действуют сила  $\bar{P}$  и реакции  $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$  стержней, которые направим по стержням от узла, считая стержни растянутыми. Составим уравнения равновесия этой пространственной системы сходящихся сил:

$$\Sigma F_{Kx} = 0, \quad P \cos \alpha_1 + N_2 \sin \psi + N_3 \sin \varphi = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{Ky} = 0; \quad P \cos \beta_1 - N_1 - N_2 \cos \psi = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma F_{Kz} = 0, \quad P \cos \gamma_1 - N_3 \cos \varphi = 0. \quad (3)$$

Решив уравнения (1), (2), (3) при заданных числовых значениях силы  $P$  и углов, получим:  $N_1=349$  Н,  $N_2=-345$  Н,  $N_3=141$  Н.

2. Рассмотрим равновесие узла М. На узел действуют сила  $\bar{Q}$  и реакции  $\bar{N}'_2, \bar{N}'_4, \bar{N}'_5, \bar{N}'_6$  стержней. При этом по закону о равенстве

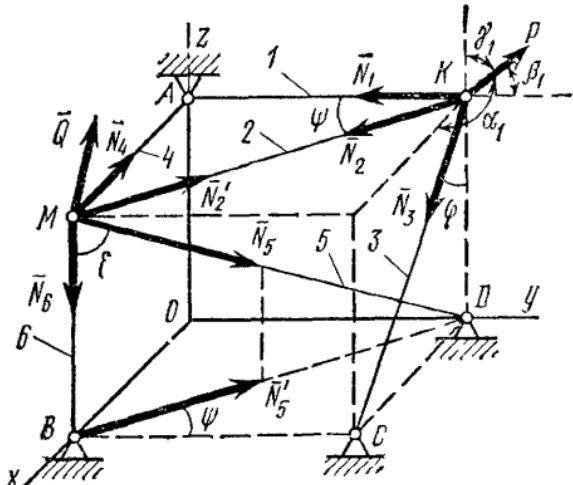


Рис. С4

действия и противодействия реакция  $\bar{N}'_2$  направлена противоположно  $\bar{N}_2$ , численно же  $N'_2=N_2$ . Составим уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{hx} = 0, \quad Q \cos \alpha_2 - N_2 \sin \psi - N_4 - N_5 \sin \delta \sin \psi = 0; \quad (4)$$

$$\Sigma F_{hy} = 0, \quad Q \cos \beta_2 + N_2 \cos \psi + N_5 \sin \delta \cos \psi = 0; \quad (5)$$

$$\Sigma F_{hz} = 0, \quad Q \cos \gamma_2 - N_5 \cos \delta - N_6 = 0. \quad (6)$$

При определении проекций силы  $\bar{N}_5$  на оси  $x$  и  $y$  в уравнениях (4) и (5) удобнее сначала найти проекцию  $\bar{N}'_5$  этой силы на плоскость  $xOy$  (по величине  $N'_5=N_5 \sin \delta$ ), а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на оси.

Решив систему уравнений (4), (5), (6) и учитывая, что  $N'_2=N_2=-345$  Н, найдем, чему равны  $N_4$ ,  $N_5$ ,  $N_6$ . Ответ:  $N_1=349$  Н;  $N_2=-345$  Н;  $N_3=141$  Н;  $N_4=50$  Н;  $N_5=329$  Н;  $N_6=-66$  Н. Знаки показывают, что стержни 2 и 6 сжаты; остальные — растянуты.

### Задача С5

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке  $A$ , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке  $B$  и невесомым стержнем  $I$  (рис. С5.0—С5.7) или же двумя подшипниками в точках  $A$  и  $B$  и двумя невесомыми стержнями  $I$  и  $2$  (рис. С5.8, С5.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

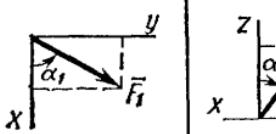
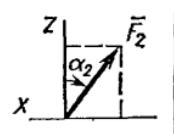
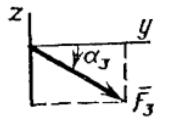
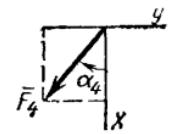
Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты  $P_1=5$  кН, вес меньшей плиты  $P_2=3$  кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость  $xy$  горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом  $M=4$  кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С5; при этом силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_4$  лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $xy$ , сила  $\bar{F}_2$  — в плоскости, параллельной  $xz$ , и сила  $\bar{F}_3$  в плоскости, параллельной  $yz$ . Точки приложения сил ( $D$ ,  $E$ ,  $H$ ,  $K$ ) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках  $A$  и  $B$  и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять  $a=0,6$  м.

**Указания.** Задача С5 — на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) — две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы  $\bar{F}$  часто удобно разложить ее на две составляющие  $\bar{F}'$  и  $\bar{F}''$ , параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона,  $m_x(\bar{F})=m_x(\bar{F}')+m_x(\bar{F}'')$  и т. д.

Таблица С5

Силы								
	$F_1 = 6 \text{ кН}$	$F_2 = 8 \text{ кН}$	$F_3 = 10 \text{ кН}$	$F_4 = 12 \text{ кН}$				
Номер условия	Точка приложения	$\alpha_1$ , град	Точка приложения	$\alpha_2$ , град	Точка приложения	$\alpha_3$ , град	Точка приложения	$\alpha_4$ , град
0	$E$	60	$H$	30	—	—	—	—
1	—	—	$D$	60	$E$	30	—	—
2	—	—	—	—	$K$	60	—	30
3	$K$	30	—	—	$D$	0	—	—
4	—	—	$E$	30	—	—	$D$	60
5	$H$	0	$K$	60	—	—	—	—
6	—	—	$H$	90	$D$	30	—	—
7	—	—	—	—	$H$	60	—	90
8	$D$	30	—	—	$K$	0	—	—
9	—	—	$D$	90	—	—	$H$	30

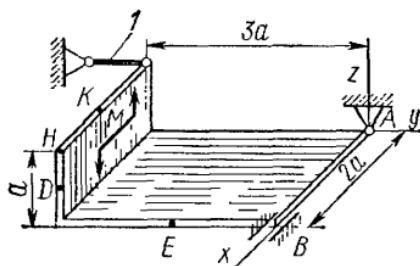


Рис. С5.0

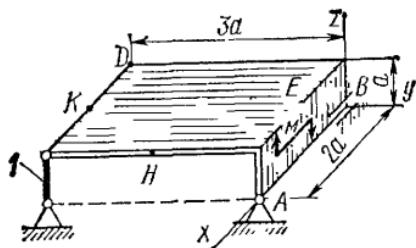


Рис. С5.1

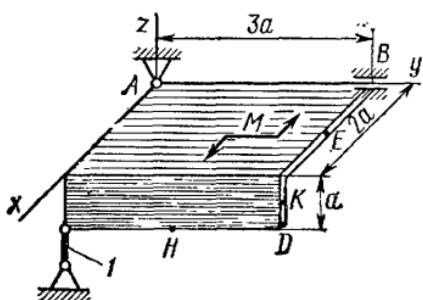


Рис. С5.2

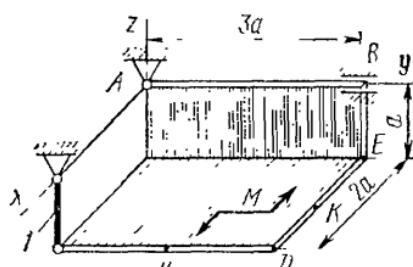


Рис. С5.3

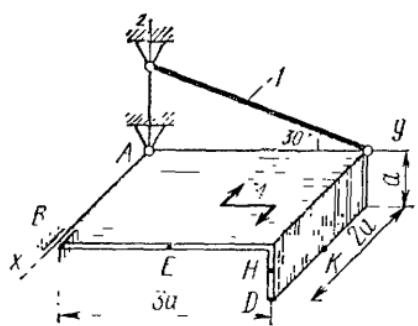


Рис. С5.4

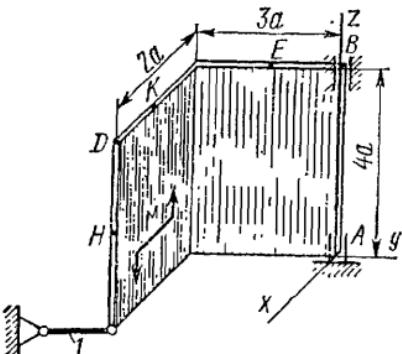


Рис. С5.5

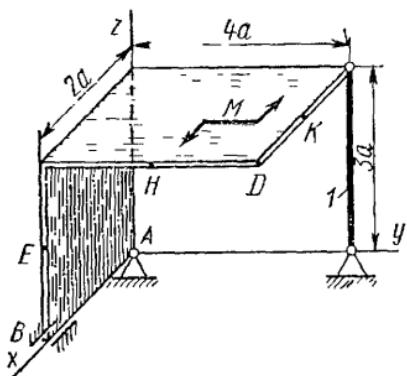


Рис. С5.6

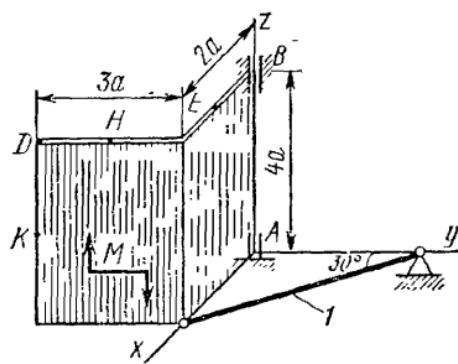
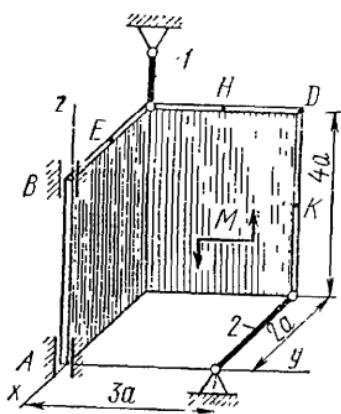


Рис. С5.7



Pic. C5.8

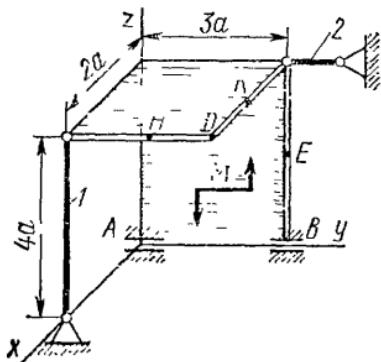


Рис. С5.9

**Пример С5.** Горизонтальная прямоугольная плита весом  $P$  (рис. С5) закреплена сферическим шарниром в точке  $A$ , цилиндрическим (подшипником) в точке  $B$  и невесомым стержнем  $DD'$ . На плиту в плоскости, параллельной  $xz$ , действует сила  $F$ , а в плоскости, параллельной  $yz$ , — пара сил с моментом  $M$ .

Дано:  $P=3$  кН,  $F=8$  кН,  $M=4$  кН·м,  $\alpha=60^\circ$ ,  $AC=0,8$  м,  $AB=1,2$  м,  $BE=0,4$  м,  $EH=0,4$  м. Определить: реакции опор  $A$ ,  $B$  и стержня  $DD'$ .

**Решение.** 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы  $\bar{P}$ ,  $\bar{F}$  и пара с моментом  $M$ , а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{Z}_A$ , цилиндрического (подшипника) — на две составляющие  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Z}_B$  (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию  $\bar{N}$  стержня направляем вдоль стержня от  $D$  к  $D'$ , предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{hx} = 0, \quad X_A + X_B + F \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{hy} = 0, \quad Y_A - N \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - P + N \sin 30^\circ - F \sin 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum m_x (\bar{F}_k) = 0, \quad M - P \cdot \frac{AB}{2} + Z_B \cdot AB - F \sin 60^\circ \cdot AB + \\ + N \sin 30^\circ \cdot AB = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sum m_y (\bar{F}_k) = 0, \quad P \cdot \frac{AC}{2} - N \sin 30^\circ \cdot AC + \\ + F \sin 60^\circ \cdot \frac{AC}{2} - F \cos 60^\circ \cdot BE = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sum m_z (\bar{F}_k) = 0, \quad -F \cos 60^\circ \cdot AB - N \cos 30^\circ \cdot AC - X_B \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Для определения моментов силы  $\bar{F}$  относительно осей разлагаем ее на составляющие  $\bar{F}'$  и  $\bar{F}''$ , параллельные осям  $x$  и  $z$  ( $F'=F \cos \alpha$ ,  $F''=F \sin \alpha$ ), и применяем теорему Вариньона (см. Указания). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции  $\bar{N}$ .

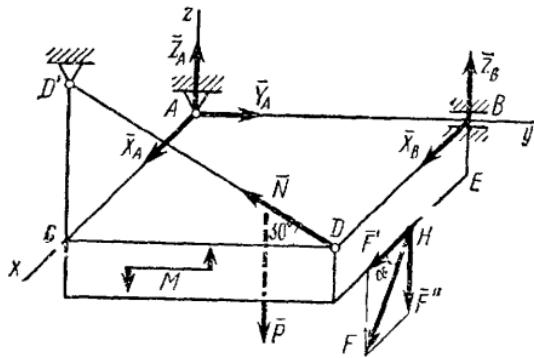


Рис. С5

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции. Ответ:  $X_A=3,4$  кН;  $Y_A=5,1$  кН;  $Z_A=4,8$  кН;  $X_B=-7,4$  кН;  $Z_B=-2,1$  кН;  $N=5,9$  кН. Знак минус указывает, что реакция  $\bar{X}_B$  направлена противоположно показанной на рис. С5.

## КИНЕМАТИКА

### Задача К1

Точка  $B$  движется в плоскости  $xy$  (рис. К1.0—К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями  $x=f_1(t)$ ,  $y=f_2(t)$ , где  $x$  и  $y$  выражены в сантиметрах,  $t$  — в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени  $t_1=1$  с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость  $x=f_1(t)$  указана непосредственно на рисунках, а зависимость  $y=f_2(t)$  дана в табл. К1 (для рис. 0—2 в столбце 2, для рис. 3—6 в столбце 3, для рис. 7—9 в столбце 4). Как и в задачах С1—С5, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 — по последней.

**Указания.** Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени  $t_1=1$  с. В некоторых вариантах задачи при определении траекторий или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:  $\cos 2\alpha=1-2 \sin^2 \alpha=2 \cos^2 \alpha-1$ ;  $\sin 2\alpha=2 \sin \alpha \cos \alpha$ .

Таблица К1

Номер условия	$y=f_2(t)$		
	рис. 0—2	рис. 3—6	рис. 7—9
1	2	3	4
0	$12 \sin \left( \frac{\pi}{6} t \right)$	$2t^2+2$	$4 \cos \left( \frac{\pi}{6} t \right) - 2$
1	$-4-6 \cos \left( \frac{\pi}{3} t \right)$	$8 \sin \left( \frac{\pi}{4} t \right)$	$14-16 \cos^2 \left( \frac{\pi}{6} t \right)$
2	$-3 \sin^2 \left( \frac{\pi}{6} t \right)$	$(2+t)^2$	$4 \cos \left( \frac{\pi}{3} t \right)$

Номер условия	$y = f_2(t)$		
	рис. 0—2	рис. 3—6	рис. 7—9
1	2	3	4
3	$9 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4$	$2t^3$	$-10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 2$	$2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$-10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - 3t^2$	$8 - 12 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$2 - 6 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
7	$2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	$(t+1)^3$	$6 - 8 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 5$	$2 - t^3$	$9 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$
9	$3 - 8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

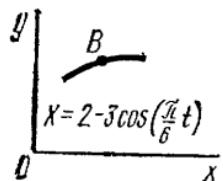


Рис. K1.0

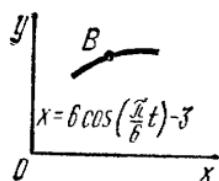


Рис. K1.1

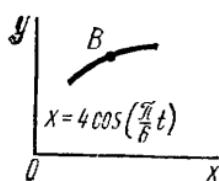


Рис. K1.2

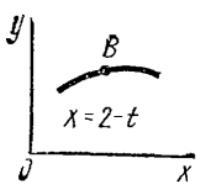


Рис. К1.3

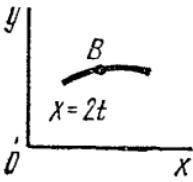


Рис. К1.4

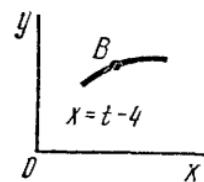


Рис. К1.5

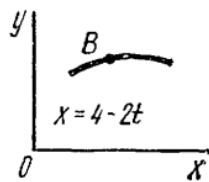


Рис. К1.6

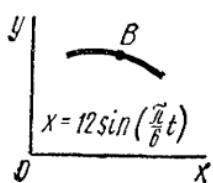


Рис. К1.7

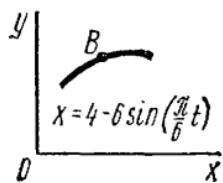


Рис. К1.8

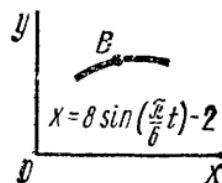


Рис. К1.9

**Пример К1.** Даны уравнения движения точки в плоскости  $xy$ :

$$x = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3; \quad y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

( $x, y$  — в сантиметрах,  $t$  — в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени  $t_1=1$  с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

**Решение.** 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движение времени  $t$ . Поскольку  $t$  входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \quad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2};$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2 \frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. К1):

$$x = (y+1)^2 + 1. \quad (2)$$

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

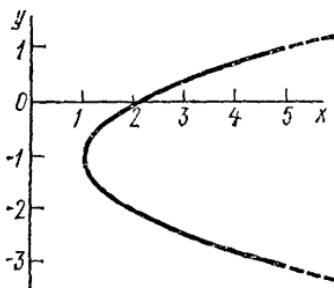


Рис К1

и при  $t=1$  с

$$\begin{aligned} v_{1x} &= 1,11 \text{ см/с}, & v_{1y} &= 0,73 \text{ см/с}, \\ v_1 &= 1,33 \text{ см/с}. \end{aligned} \quad (3)$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); & a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right); \\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \end{aligned}$$

и при  $t=1$  с

$$\begin{aligned} a_{1x} &= 0,87 \text{ см/с}^2, & a_{1y} &= -0,12 \text{ см/с}^2, \\ a_1 &= 0,88 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ . Получим:

$$\begin{aligned} 2v \frac{dv}{dt} &= 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} \\ \text{и } a_\tau &= \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \end{aligned} \quad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при  $t=1$  с  $a_{1\tau}=0,66$  см/с<sup>2</sup>.

5. Нормальное ускорение точки  $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$ . Подставляя сюда найденные числовые значения  $a_1$  и  $a_{1\tau}$ , получим, что при  $t=1$  с  $a_{1n}=0,58$  см/с<sup>2</sup>.

6. Радиус кривизны траектории  $\rho = v^2/a_n$ . Подставляя сюда числовые значения  $v_1$  и  $a_{1n}$ , найдем, что при  $t=1$  с  $\rho_1=3,05$  см. Ответ:  $v_1=1,33$  см/с,  $a_1=0,88$  см/с<sup>2</sup>,  $a_{1\tau}=0,66$  см/с<sup>2</sup>,  $a_{1n}=0,58$  см/с<sup>2</sup>,  $\rho_1=3,05$  см.

### Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колес 1—3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес

(рис. К2.0—К2.9, табл. К2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 —  $r_1=2$  см,  $R_1=4$  см, у колеса 2 —  $r_2=6$  см,  $R_2=8$  см, у колеса 3 —  $r_3=12$  см,  $R_3=16$  см. На ободьях колес расположены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где  $\varphi_1(t)$  — закон вращения колеса 1,  $s_4(t)$  — закон движения рейки 4,  $\omega_2(t)$  — закон изменения угловой скорости колеса 2,  $v_5(t)$  — закон изменения скорости груза 5 и т. д. (всюду  $\varphi$  выражено в радианах,  $s$  — в сантиметрах,  $t$  — в секундах). Положительное направление для  $\varphi$  и  $\omega$  против хода часовой стрелки, для  $s_4$ ,  $s_5$  и  $v_4$ ,  $v_5$  — вниз.

Определить в момент времени  $t_1=2$  с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости ( $v$  — линейные,  $\omega$  — угловые) и ускорения ( $a$  — линейные,  $\epsilon$  — угловые) соответствующих точек или тел ( $v_5$  — скорость груза 5 и т. д.).

**Указания.** Задача К2 — на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учтеть, что когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Таблица К2

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	$v_B, v_C$	$\epsilon_2, a_A, a_5$
1	$v_5 = 2(t^2 - 3)$	$v_A, v_C$	$\epsilon_3, a_B, a_4$
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	$v_4, \omega_2$	$\epsilon_2, a_C, a_5$
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	$v_5, \omega_3$	$\epsilon_2, a_A, a_4$
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	$v_4, \omega_1$	$\epsilon_1, a_B, a_5$
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	$v_5, v_B$	$\epsilon_2, a_C, a_4$
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	$v_4, \omega_1$	$\epsilon_1, a_C, a_5$
7	$v_4 = 3t^2 - 8$	$v_A, \omega_3$	$\epsilon_3, a_B, a_5$
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	$v_4, \omega_2$	$\epsilon_1, a_C, a_4$
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	$v_5, v_B$	$\epsilon_2, a_A, a_4$

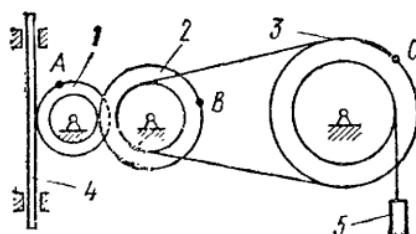


Рис. К2.0

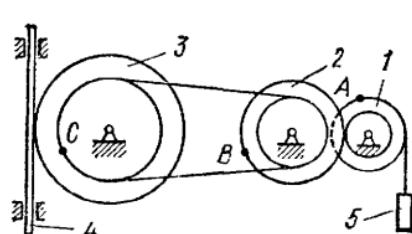


Рис. К2.1

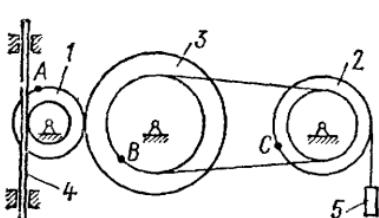


Рис. К2.2

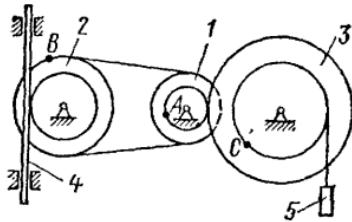


Рис. К2.3

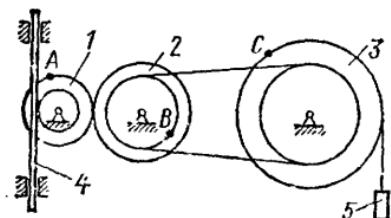


Рис. К2.4

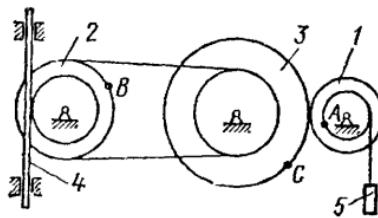


Рис. К2.5

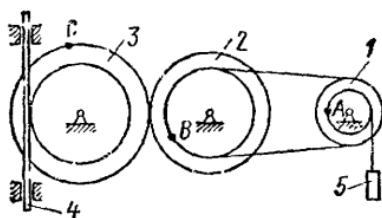


Рис. К2.6

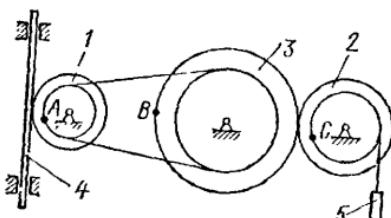


Рис. К2.7

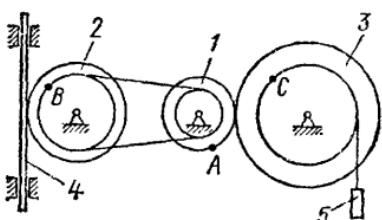


Рис. К2.8

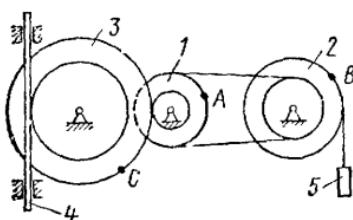


Рис. К2.9

**Пример К2.** Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами  $R_2$  и  $r_2$  и колесо 3 радиуса  $R_3$ , скрепленное с валом радиуса  $r_3$ , находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. К2). Рейка движется по закону  $s_1 = f(t)$ .

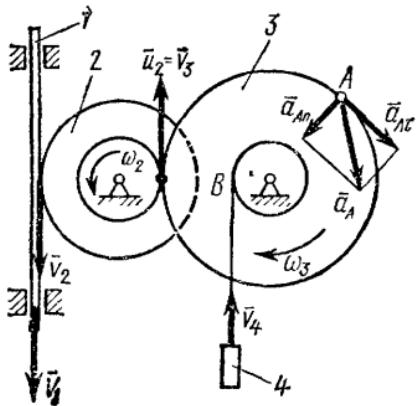


Рис. К2

Дано:  $R_2=6$  см,  $r_2=4$  см,  $R_3=8$  см,  $r_3=3$  см,  $s_1=3t^3$  (с — в сантиметрах,  $t$  — в секундах),  $A$  — точка обода колеса  $3$ ,  $t_1=3$  с. Определить:  $\omega_3$ ,  $v_4$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $a_A$  в момент времени  $t=t_1$ .

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса  $R_i$ ), через  $v_i$ , а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса  $r_i$ ), — через  $u_i$ .

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени  $t$ . Зная закон движения рейки  $1$ , находим ее скорость

$$v_1 = \dot{s}_1 = 9t^2. \quad (1)$$

Так как рейка и колесо  $2$  находятся в зацеплении, то  $v_2=v_1$  или  $\omega_2 R_2 = v_1$ . Но колеса  $2$  и  $3$  тоже находятся в зацеплении, следовательно,  $u_2=v_3$  или  $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$ . Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{3}{2} t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3} \omega_2 = \frac{3}{4} t^2. \quad (2)$$

Тогда для момента времени  $t_1=3$  с получим  $\omega_3=6,75$  с<sup>-1</sup>.

2. Определяем  $v_4$ . Так как  $v_4=v_B=\omega_3 r_3$ , то при  $t_1=3$  с  $v_4=20,25$  см/с.

3. Определяем  $\varepsilon_3$ . Учитывая второе из равенств (2), получим  $\varepsilon_3=\dot{\omega}_3=1,5 t$ . Тогда при  $t_1=3$  с  $\varepsilon_3=4,5$  с<sup>-2</sup>.

4. Определяем  $a_A$ . Для точки  $A$   $\bar{a}_A = \bar{a}_{At} + \bar{a}_{An}$ , где численно  $a_{At}=R_3 \varepsilon_3$ ,  $a_{An}=R_3 \omega_3^2$ . Тогда для момента времени  $t_1=3$  с имеем

$$a_{At} = 36 \text{ см/с}^2, \quad a_{An} = 64,5 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{a_{At}^2 + a_{An}^2} = 366,3 \text{ см/с}^2.$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. К2. Ответ:  $\omega_3=6,75$  с<sup>-1</sup>;  $v_4=20,25$  см/с;  $\varepsilon_3=4,5$  с<sup>-2</sup>;  $a_A=366,3$  см/с<sup>2</sup>.

### Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$  и ползуна  $B$  или  $E$  (рис. К3.0—К3.7) или из стержней  $1$ ,  $2$ ,  $3$  и ползунов  $B$  и  $E$  (рис. К3.8, К3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами  $O_1$ ,  $O_2$  шарнирами; точка  $D$  находится в середине стержня  $AB$ . Длины стержней равны соответственно:  $l_1=0,4$  м,  $l_2=1,2$  м,  $l_3=1,4$  м,  $l_4=0,6$  м. Положение механизма определяется углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ . Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К3а (для рис. 0—4) или в табл. К3б (для рис. 5—9); при этом в табл. К3а  $\omega_1$  и  $\omega_4$  — величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол  $\gamma$  на рис. 8 следует отложить от  $DB$  по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 — против хода часовой стрелки и т. д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом  $\alpha$ ; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К3 (см. рис. К3, б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против хода часовой стрелки, а заданные скорость  $v_B$  и ускорение  $a_B$  — от точки  $B$  к  $b$  (на рис. 5—9).

**Указания.** Задача К3 — на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применив эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n$ , где  $A$  — точка, ускорение которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка  $A$  движется по дуге окружности, то  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n$ );  $B$  — точка, ускорение  $\bar{a}_B$  которой нужно определить (если точка  $B$  движется по дуге окружности радиуса  $l$ , то  $\bar{a}_B = \bar{a}_B^t + \bar{a}_B^n$ , где численно  $a_B^n = v_B^2/l$ ; входящая сюда скорость  $v_B$  определяется так же, как и скорости других точек механизма).

Таблица К3а (к рис. К3.0—К3.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varphi$	$\theta$	$\omega_1, 1/c$	$\omega_1, 1/c$	$v$ точек	$\omega$ звена	$a$ точки	$\varepsilon$ звена
0	0	60	30	0	120	6	—	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
1	90	120	150	0	30	—	4	$A, E$	$AB$	$A$	$AB$
2	30	60	30	0	120	5	—	$B, E$	$AB$	$B$	$AB$
3	60	150	150	90	30	—	5	$A, E$	$DE$	$A$	$AB$
4	30	30	60	0	150	4	—	$D, E$	$AB$	$B$	$AB$
5	90	120	120	90	60	—	6	$A, E$	$AB$	$A$	$AB$
6	90	150	120	90	30	3	—	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
7	0	60	60	0	120	—	2	$A, E$	$DE$	$A$	$AB$
8	60	150	120	90	30	2	—	$D, E$	$AB$	$B$	$AB$
9	30	120	150	0	60	—	8	$A, E$	$DE$	$A$	$AB$

Таблица К3б (к рис. К3.5—К3.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varphi$	$\theta$	$\omega_1, 1/c$	$\varepsilon_1, 1/c^2$	$v_B, м/с$	$a_B, м/с^2$	$v$ точек	$\omega$ звена	$a$ точки	$\varepsilon$ звена
0	120	30	30	90	150	2	4	—	—	B, E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	—	—	4	6	A, E	DE	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	—	—	B, E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	—	—	6	8	A, E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	—	—	B, E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	—	—	8	10	D, E	DE	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	—	—	B, E	DE	B	AB
7	30	120	30	0	60	—	—	2	5	A, E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	—	—	B, E	DE	B	AB
9	60	60	60	90	30	—	—	5	4	D, E	AB	A	AB

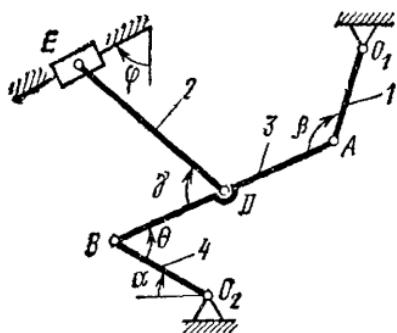


Рис. К3.0

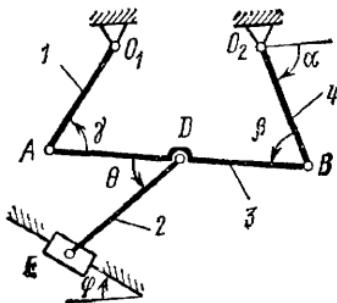


Рис. К3.1

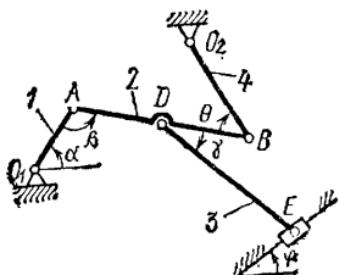


Рис. К3.2

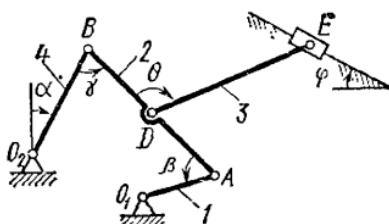


Рис. К3.3

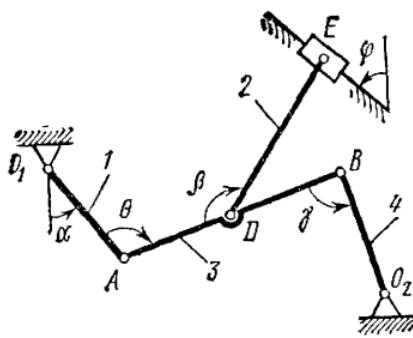


Рис. К3.4

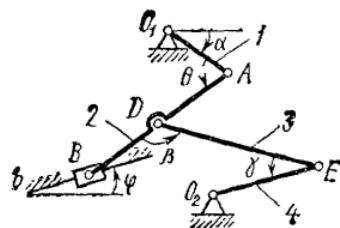


Рис. К3.5

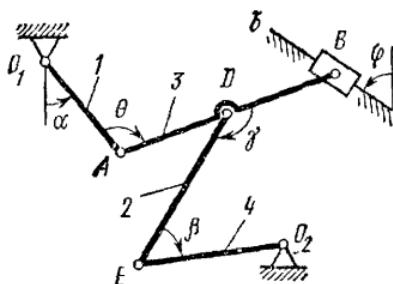


Рис. К3.6

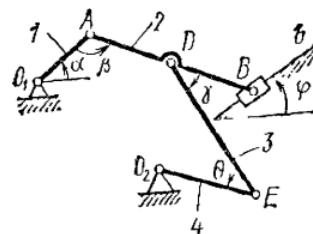


Рис. К3.7

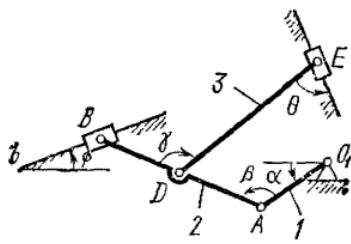


Рис. К3.8

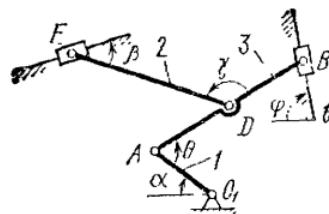


Рис. К3.9

**Пример К3.** Механизм (рис. К3.а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами *O<sub>1</sub>* и *O<sub>2</sub>* шарнирами.

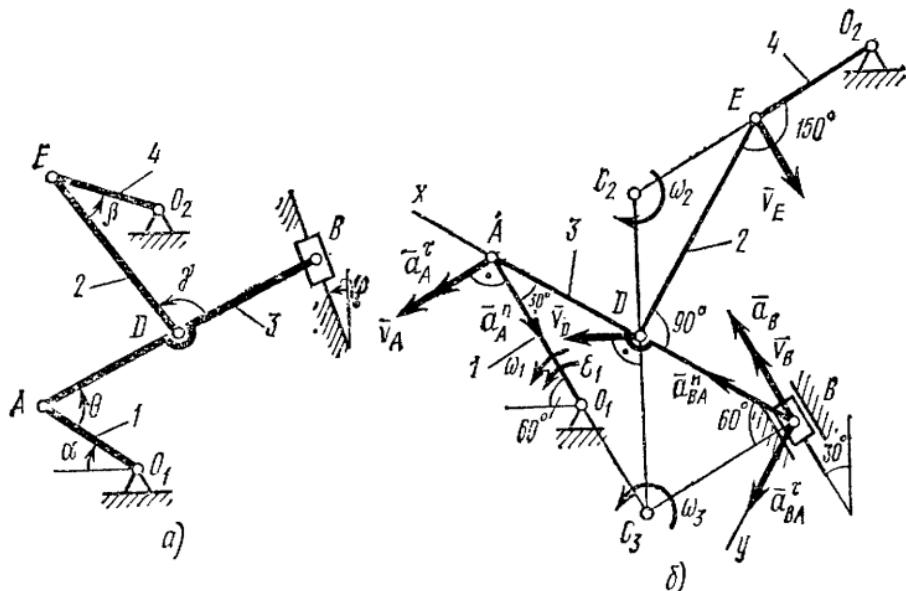


Рис. К3

Дано:  $\alpha=60^\circ$ ,  $\beta=150^\circ$ ,  $\gamma=90^\circ$ ,  $\varphi=30^\circ$ ,  $\theta=30^\circ$ ,  $AD=DB$ ,  $l_1=0,4$  м,  $l_2=1,2$  м,  $l_3=1,4$  м,  $\omega_1=2\text{с}^{-1}$ ,  $\epsilon_1=7\text{с}^{-2}$  (направления  $\omega_1$  и  $\epsilon_1$  — против хода часовой стрелки). Определить:  $v_B$ ,  $v_E$ ,  $\omega_2$ ,  $a_B$ ,  $\epsilon_3$ .

**Решение.** 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К3, б).

2. Определяем  $v_B$ . Точка  $B$  принадлежит стержню  $AB$ . Чтобы найти  $v_B$ , надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление  $\bar{v}_B$ . По данным задачи, учитывая направление  $\omega_1$ , можем определить  $\bar{v}_A$ ; численно

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0,8 \text{ м/с}; \quad \bar{v}_A \perp O_1 A. \quad (1)$$

Направление  $\bar{v}_B$  найдем, учитя, что точка  $B$  принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная  $\bar{v}_A$  и направление  $\bar{v}_B$ , воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня  $AB$ ) на прямую, соединяющую эти точки (прямая  $AB$ ). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор  $\bar{v}_B$  (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ \text{ и } v_B = 0,46 \text{ м/с.} \quad (2)$$

3. Определяем  $\bar{v}_E$ . Точка  $E$  принадлежит стержню  $DE$ . Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить  $\bar{v}_E$ , надо сначала найти скорость точки  $D$ , принадлежащей одновременно стержню  $AB$ . Для этого, зная  $\bar{v}_A$  и  $\bar{v}_B$ , строим мгновенный центр скоростей

(МЦС) стержня  $\bar{AB}$ ; это точка  $C_3$ , лежащая на пересечении перпендикуляров к  $\bar{v}_A$  и  $\bar{v}_B$ , восстановленных из точек  $A$  и  $B$  (к  $\bar{v}_A$  перпендикулярен стержень  $I$ ). По направлению вектора  $\bar{v}_A$  определяем направление поворота стержня  $AB$  вокруг МЦС  $C_3$ . Вектор  $\bar{v}_D$  перпендикулярен отрезку  $C_3D$ , соединяющему точки  $D$  и  $C_3$ , и направлен в сторону поворота. Величину  $v_D$  найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_3 D} = \frac{v_B}{C_3 B}. \quad (3)$$

Чтобы вычислить  $C_3D$  и  $C_3B$ , заметим, что  $\triangle AC_3B$  прямоугольный, так как острые углы в нем равны  $30$  и  $60^\circ$ , и что  $C_3B = AB \sin 30^\circ = 0,5AB = BD$ . Тогда  $\triangle BC_3D$  является равносторонним и  $C_3B = C_3D$ . В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_B = 0,46 \text{ м/с}; \quad \bar{v}_D \perp C_3 D. \quad (4)$$

Так как точка  $E$  принадлежит одновременно стержню  $O_2E$ , вращающемуся вокруг  $O_2$ , то  $\bar{v}_E \perp O_2E$ . Тогда, восставляя из точек  $E$  и  $D$  перпендикуляры к скоростям  $\bar{v}_E$  и  $\bar{v}_D$ , построим МЦС  $C_2$  стержня  $DE$ . По направлению вектора  $\bar{v}_D$  определяем направление поворота стержня  $DE$  вокруг центра  $C_2$ . Вектор  $\bar{v}_E$  направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К3, б видно, что  $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$ , откуда  $C_2E = C_2D$ . Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_F}{C_2 E} = \frac{v_D}{C_2 D}, \quad v_E - v_D = 0,46 \text{ м/с}. \quad (5)$$

4. Определяем  $\omega_2$ . Так как МЦС стержня 2 известен (точка  $C_2$ ) и

$$C_2 D = \frac{l_2}{2 \cos 30^\circ} = 0,69 \text{ м}, \text{ то}$$

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2 D} = 0,67 \text{ с}^{-1}. \quad (6)$$

5. Определяем  $\bar{a}_B$ . Точка  $B$  принадлежит стержню  $AB$ . Чтобы найти  $\bar{a}_B$ , надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня  $AB$  и траекторию точки  $B$ . По данным задачи можем определить  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$ , где численно

$$a_A^\tau = \epsilon_1 l_1 = 2,8 \text{ м/с}^2; \quad a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1,6 \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

Вектор  $\bar{a}_A^n$  направлен вдоль  $AO_1$ , а  $\bar{a}_A^\tau$  — перпендикулярно  $AO_1$ ; изображаем эти векторы на чертеже.

Так как точка  $B$  одновременно принадлежит ползуну, то вектор  $\bar{a}_B$  параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор  $\bar{a}_B$  на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и  $\bar{v}_B$ .

Для определения  $\bar{a}_B$  воспользуемся равенством

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы  $\bar{a}_{BA}^n$  (вдоль  $BA$  от  $B$  к  $A$ ) и  $\bar{a}_{BA}^\tau$  (в любую сторону перпендикулярно  $BA$ ); численно  $a_{BA}^n = \omega_3^2 \cdot l_3$ . Найдя  $\omega_3$  с помощью построенного МЦС  $C_3$  стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3 A} = \frac{v_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0,66 \text{ c}^{-1} \text{ и } a_{BA}^n = 0,61 \text{ м/c}^2. \quad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения  $a_B$  и  $a_{BA}^\tau$ ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить  $a_B$ , спроектируем обе части равенства (8) на направление  $AB$  (ось  $x$ ), перпендикулярное неизвестному вектору  $\bar{a}_{BA}^\tau$ . Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \quad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0,72 \text{ м/c}^2. \quad (11)$$

Так как получилось  $a_B > 0$ , то, следовательно, вектор  $\bar{a}_B$  направлен как показано на рис. К3, б.

6. Определяем  $\varepsilon_3$ . Чтобы найти  $\varepsilon_3$ , сначала определим  $a_{BA}^\tau$ . Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное  $AB$  (ось  $y$ ). Тогда получим

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ - a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau. \quad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что  $a_{BA}^\tau = -3,58 \text{ м/c}^2$ . Знак указывает, что направление  $a_{BA}^\tau$  противоположно показанному на рис. К3, б.

Теперь из равенства  $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$  получим

$$\varepsilon_3 = \frac{|a_{BA}^\tau|}{l_3} = 2,56 \text{ c}^{-2}.$$

Ответ:  $v_B = 0,46 \text{ м/c}$ ;  $v_E = 0,46 \text{ м/c}$ ;  $\omega_2 = 0,67 \text{ c}^{-1}$ ;  $a_B = 0,72 \text{ м/c}^2$ ;  $\varepsilon_3 = 2,56 \text{ c}^{-2}$ .

## Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. К4.0—К4.4) или круглая пластина радиуса  $R=60 \text{ см}$  (рис. К4.5—К4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону  $\varphi=f_1(t)$ , заданному в табл. К4. Положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку  $O$  (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения  $OO_1$  лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой  $BD$  (рис. 0—4) или по окружности радиуса  $R$  (рис. 5—9) движется точка  $M$ ; закон ее относительного

движения, т. е. зависимость  $s=AM=f_2(t)$  ( $s$  выражено в сантиметрах,  $t$  — в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 0—4 и для рис. 5—9; там же даны размеры  $b$  и  $R$ . На рисунках точка  $M$  показана в положении, при котором  $s=AM>0$  (при  $s<0$  точка  $M$  находится по другую сторону от точки  $A$ ).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t_1=1$  с.

**Указания.** Задача К4 — на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка  $M$  на пластине в момент времени  $t_1=1$  с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. 5—9, при решении задачи не подставлять числового значения  $R$ , пока не будут определены положение точки  $M$  в момент времени  $t_1=1$  с и угол между радиусами  $CM$  и  $CA$  в этот момент.

Таблица К4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi=f_1(t)$	Для рис. 0—4		Для рис. 5—9	
		$b$ , см	$s=AM=f_2(t)$	$t$	$s=\widetilde{AM}=f(t)$
0	$4(t^2-t)$	12	$50(3t-t^2)-64$	$R$	$\frac{\pi}{3}R(4t^2-2t^3)$
1	$3t^2-8t$	16	$40(3t^2-t^4)-32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2-t^3)$
2	$6t^3-12t^2$	10	$80(t^2-t)+40$	$R$	$\frac{\pi}{3}R(2t^2-1)$
3	$t^2-2t^3$	16	$60(t^4-3t^2)+56$	$R$	$\frac{\pi}{6}R(3t-t^2)$
4	$10t^2-5t^3$	8	$80(2t^2-t^3)-48$	$R$	$\frac{\pi}{3}R(t^3-2t)$
5	$2(t^2-t)$	20	$60(t^3-2t^2)$	$R$	$\frac{\pi}{3}R(t^3-2t)$
6	$5t-4t^2$	12	$40(t^2-3t)+32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3-2t^2)$
7	$15t-3t^3$	8	$60(t-t^3)+24$	$R$	$\frac{\pi}{6}R(t-5t^2)$
8	$2t^3-11t$	10	$50(5t^3-t)-30$	$R$	$\frac{\pi}{3}R(3t^2-t)$
9	$6t^2-3t^3$	20	$40(t-2t^3)-40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t-2t^2)$

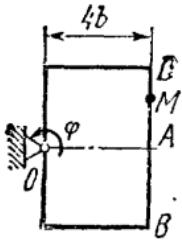


Рис. К4.0

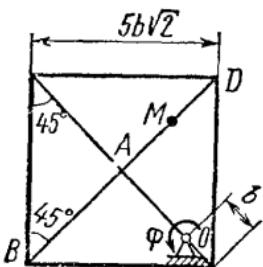


Рис. К4.1

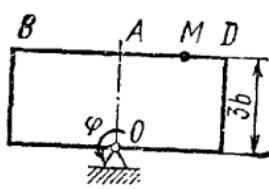


Рис. К4.2

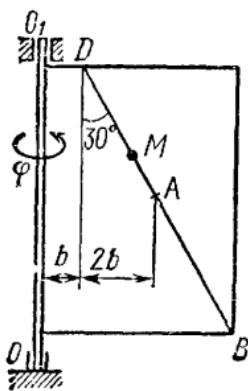


Рис. К4.3

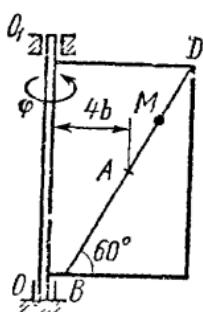


Рис. К4.4

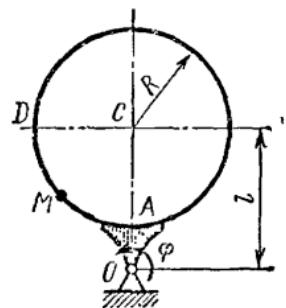


Рис. К4.5

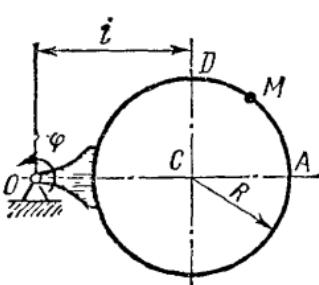


Рис. К4.6

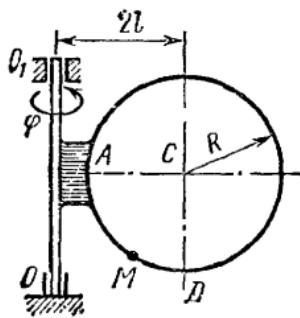


Рис. К4.7

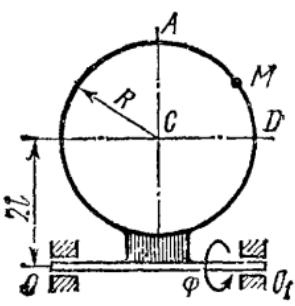


Рис. К4.8

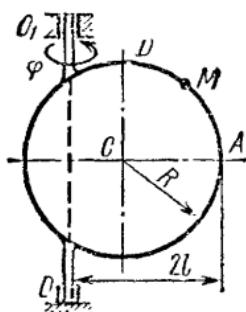


Рис. К4.9

**Пример К4.** Шар радиуса  $R$  (рис. К4, а) вращается вокруг своего диаметра  $AB$  по закону  $\varphi = f_1(t)$  (положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рис. К4, а дуговой стрелкой). По дуге

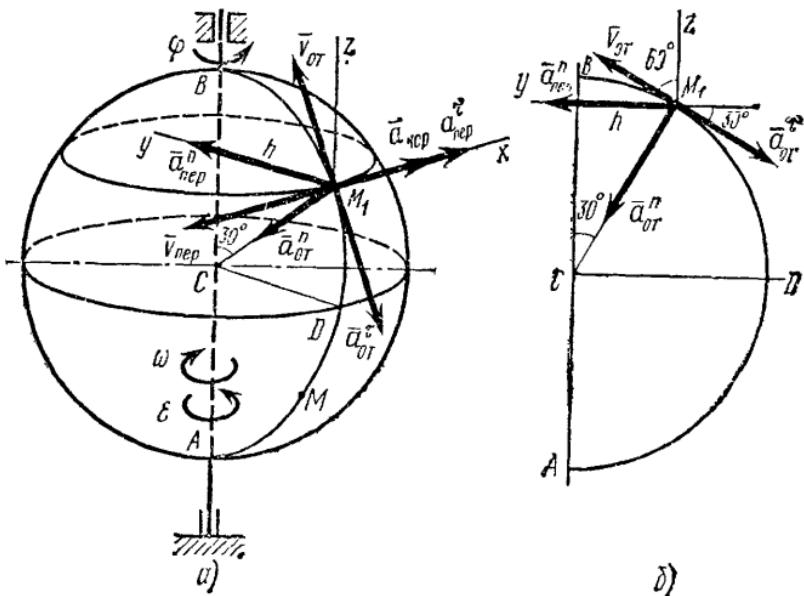


Рис. К4

большого круга («меридиану»)  $\widehat{ADB}$  движется точка  $M$  по закону  $s = \widehat{AM} = f_2(t)$ ; положительное направление отсчета  $s$  от  $A$  к  $D$ .

Дано:  $R = 0,5$  м,  $\varphi = 2t^3 - 4t^2$ ,  $s = (\pi R/6)(7t - 2t^2)$  ( $\varphi$  — в радианах,  $s$  — в метрах,  $t$  — в секундах). Определить:  $v_{ab}$  и  $a_{ab}$  в момент времени  $t_1 = 1$  с.

**Решение.** Рассмотрим движение точки  $M$  как сложное, считая ее движение по дуге  $\widehat{ADB}$  относительным ( $\widehat{AB}$  — относительная траектория точки), а вращение шара — переносным движением. Тогда абсолютная скорость  $\bar{v}_{ab}$  и абсолютное ускорение  $\bar{a}_{ab}$  точки найдутся по формулам:

$$\bar{v}_{ab} = \bar{v}_{ort} + \bar{v}_{per}, \quad \bar{a}_{ab} = \bar{a}_{ort} + \bar{a}_{per} + \bar{a}_{kor}, \quad (1)$$

где, в свою очередь,  $\bar{a}_{ort} = \bar{a}_{ort}^t + \bar{a}_{ort}^n$ ,  $\bar{a}_{per} = \bar{a}_{per}^t - \bar{a}_{per}^n$ .

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = \widehat{AM} = (\pi R/6)(7t - 2t^2). \quad (2)$$

Сначала установим, где будет находиться точка  $M$  на дуге  $\widehat{ADB}$  в момент времени  $t_1$ . Полагая в уравнении (2)  $t = 1$  с, получим

$$s_1 = \frac{5}{6} \pi R. \quad \text{Тогда } \angle ACM = \frac{s_1}{R} = \frac{5}{6} \pi = 150^\circ$$

или  $\angle BCM = 30^\circ$ . Изображаем на рис. К4, а точку в положении, определяемом этим углом (точка  $M_1$ )

Теперь находим числовые значения  $v_{\text{от}}$ ,  $a_{\text{от}}^{\tau}$ ,  $a_{\text{от}}^n$ :

$$v_{\text{от}} = \dot{s} = (\pi R / 6) (7 - 4t); \quad a_{\text{от}}^{\tau} = \dot{v}_{\text{от}} = -\frac{2}{3} \pi R; \\ a_{\text{от}}^n = v_{\text{от}}^2 / \rho_{\text{от}} = v_{\text{от}}^2 / R,$$

где  $\rho_{\text{от}}$  — радиус кривизны относительной траектории, т. е. дуги  $ADB$ . Для момента времени  $t_1 = 1\text{ с}$ , учитывая, что  $R = 0,5\text{ м}$ , получим

$$v_{\text{от}} = \frac{\pi R}{6} 3 = \frac{\pi}{4} \text{ м/с}; \quad a_{\text{от}}^{\tau} = -\frac{\pi}{3} \text{ м/с}^2; \quad (3)$$

$$a_{\text{от}}^n = \frac{\pi^2}{8} \text{ м/с}^2.$$

Знаки показывают, что вектор  $\bar{v}_{\text{от}}$  направлен в сторону положительного отсчета расстояния  $s$ , а вектор  $\bar{a}_{\text{от}}^{\tau}$  — в противоположную сторону; вектор  $\bar{a}_{\text{от}}^n$  направлен к центру  $C$  дуги  $ADB$ . Изображаем все эти векторы на рис. К4, а. Для наглядности приведен рис. К4, б, где дуга  $ADB$  совмещена с плоскостью чертежа.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону  $\varphi = 2t^3 - 4t^2$ . Найдем угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\epsilon$  переносного вращения:  $\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 8t$ ,  $\epsilon = \ddot{\varphi} = 12t - 8$  и при  $t_1 = 1\text{ с}$

$$\omega = -2\text{ с}^{-1}; \quad \epsilon = 4\text{ с}^{-2}. \quad (4)$$

Знаки указывают, что при  $t_1 = 1\text{ с}$  направление  $\epsilon$  совпадает с направлением положительного отсчета угла  $\varphi$ , а направление  $\omega$  ему противоположно; отметим это на рис. К4, а соответствующими дуговыми стрелками.

Для определения  $\bar{v}_{\text{пер}}$  и  $\bar{a}_{\text{пер}}$  находим сначала расстояние  $h$  точки  $M_1$  от оси вращения. Получаем  $h = R \sin 30^\circ = 0,25\text{ м}$ . Тогда в момент времени  $t_1 = 1\text{ с}$ , учитывая равенства (4), получим:

$$v_{\text{пер}} = |\omega| h = 0,5 \text{ м/с}, \quad a_{\text{пер}}^{\tau} = \epsilon h = 1 \text{ м/с}^2, \quad (5)$$

$$a_{\text{пер}}^n = \omega^2 h = 1 \text{ м/с}^2.$$

Изображаем на рис. К4, а векторы  $\bar{v}_{\text{пер}}$  и  $\bar{a}_{\text{пер}}^{\tau}$  с учетом направлений  $\omega$  и  $\epsilon$  и вектор  $\bar{a}_{\text{пер}}^n$  (направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором  $\bar{v}_{\text{от}}$  и осью вращения (вектором  $\bar{\omega}$ ) равен  $60^\circ$ , то численно в момент времени  $t_1=1$  с [см. равенства (3) и (4)]

$$a_{\text{кор}} = 2 |v_{\text{от}}| \cdot |\omega| \sin 60^\circ = 2 \frac{\pi}{4} \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,72 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Направление  $\bar{a}_{\text{кор}}$  найдем, спроектировав вектор  $\bar{v}_{\text{от}}$  на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как вектор  $\bar{a}_{\text{пер}}^t$ ), и повернув затем эту проекцию в сторону  $\omega$ , т. е. по ходу часовой стрелки, на  $90^\circ$ . Иначе направление  $\bar{a}_{\text{кор}}$  можно найти, учитя, что  $a_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}})$ . Изображаем вектор  $\bar{a}_{\text{кор}}$  на рис. К4, а.

Теперь можно вычислить значения  $v_{ab}$  и  $a_{ab}$ .

4. Определение  $v_{ab}$ . Так как  $v_{ab} = v_{\text{от}} + \bar{v}_{\text{пер}}$ , а векторы  $\bar{v}_{\text{от}}$  и  $\bar{v}_{\text{пер}}$  взаимно перпендикулярны (см. рис. К4, а), то в момент времени  $t_1=1$  с

$$v_{ab} = \sqrt{v_{\text{от}}^2 + v_{\text{пер}}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0,5)^2} = 0,93 \text{ м/с.}$$

5. Определение  $a_{ab}$ . По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{ab} = \bar{a}_{\text{от}}^t + \bar{a}_{\text{от}}^n + \bar{a}_{\text{пер}}^t + \bar{a}_{\text{пер}}^n + \bar{a}_{\text{кор}}. \quad (7)$$

Для определения  $a_{ab}$  проведем координатные оси  $M_1xyz$  (см. рис. К4, а) и вычислим проекции вектора  $\bar{a}_{ab}$  на эти оси. Учтем при этом, что векторы  $\bar{a}_{\text{пер}}^t$  и  $\bar{a}_{\text{кор}}$  лежат на проведенной оси  $x$ , а векторы  $\bar{a}_{\text{от}}^t$ ,  $\bar{a}_{\text{от}}^n$  и  $\bar{a}_{\text{пер}}^n$  расположены в плоскости дуги  $\widehat{ADB}$ , т. е. в плоскости  $M_1yz$  (см. рис. К4, б). Тогда, проектируя обе части равенства (7) на координатные оси и учитя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени  $t_1=1$  с:

$$a_{abx} = a_{\text{пер}}^t + a_{\text{кор}} = 1 + 2,72 = 3,72 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{aby} = a_{\text{пер}}^n + a_{\text{от}}^n \cos 60^\circ - |a_{\text{от}}^t| \cos 30^\circ = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi \sqrt{3}}{6} = 0,71 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{abz} = -|a_{\text{от}}^t| \cos 60^\circ - a_{\text{от}}^n \cos 30^\circ = -\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{16}\right) = -1,59 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда находим значение  $a_{ab}$  в момент времени  $t_1=1$  с:

$$a_{ab} = \sqrt{a_{abx}^2 + a_{aby}^2 + a_{abz}^2} = 4,1 \text{ м/с}^2.$$

Ответ:  $v_{ab}=0,93$  м/с;  $a_{ab}=4,1$  м/с<sup>2</sup>.

# ДИНАМИКА

## Задача Д1

Груз  $D$  массой  $m$ , получив в точке  $A$  начальную скорость  $v_0$ , движется в изогнутой трубе  $ABC$ , расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0—Д1.9, табл. Д1).

На участке  $AB$  на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила  $\bar{Q}$  (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды  $R$ , зависящая от скорости  $v$  груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке  $AB$  пренебречь.

В точке  $B$  груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок  $BC$  трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу  $f=0,2$ ) и переменная сила  $\bar{F}$ , проекция которой  $F_x$  на ось  $x$  задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние  $AB=l$  или время  $t_1$  движения груза от точки  $A$  до точки  $B$ , найти закон движения груза на участке  $BC$ , т. е.  $x=f(t)$ , где  $x=BD$ .

**Указания.** Задача Д1—на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке  $AB$ , учитя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке  $AB$  или длину этого участка, определить скорость груза в точке  $B$ . Эта скорость будет начальной для движения груза на участке  $BC$ . После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке  $BC$  тоже с учетом начальных условий, велия отсчет времени от момента, когда груз находится в точке  $B$ , и полагая в этот момент  $t=0$ . При интегрировании уравнения движения на участке  $AB$  в случае, когда задана длина  $l$  участка, целесообразно перейти к переменному  $x$ , учитя, что

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx} .$$

Таблица Д1

Номер условия	$m$ , кг	$v_0$ , м/с	$Q$ , Н	$R$ , Н	$l$ , м	$t$ , с	$F_x$ , Н
0	2	20	6	$0,4v$	—	2,5	$2 \sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0,8v^2$	1,5	—	$6t$
2	4,5	18	9	$0,5v$	—	3	$3 \sin(2t)$
3	6	14	22	$0,6v^2$	5	—	$-3 \cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0,4v$	—	2	$4 \cos(4t)$
5	8	10	16	$0,5v^2$	4	—	$-6 \sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0,3v$	—	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0,8v^2$	2,5	—	$-8 \cos(4t)$
8	3	22	9	$0,5v$	—	3	$2 \cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0,2v^2$	4	—	$-6 \sin(4t)$

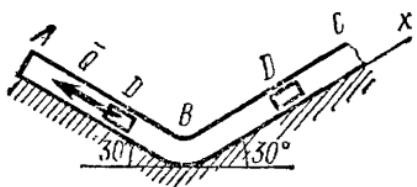


Рис. Д1.0

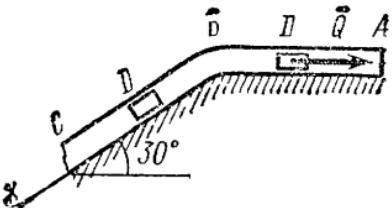


Рис. Д1.1

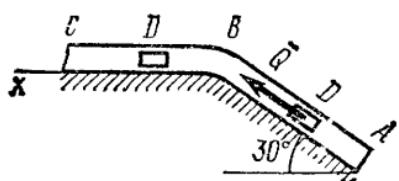


Рис. Д1.2

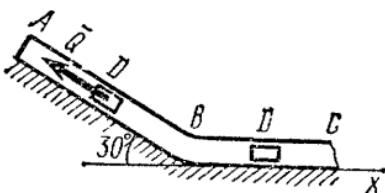


Рис. Д1.3

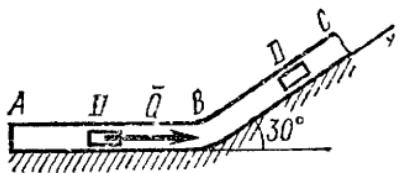


Рис. Д1.4

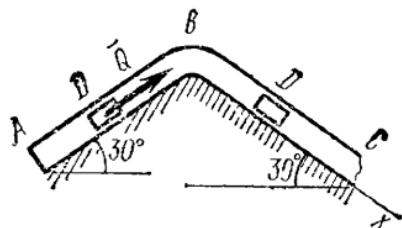


Рис. Д1.5

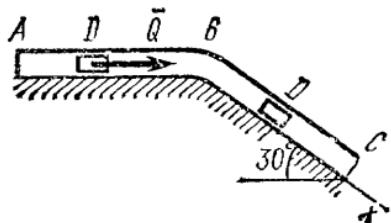


Рис. Д1.6

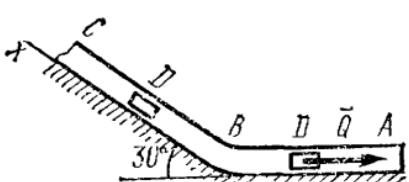


Рис. Д1.7

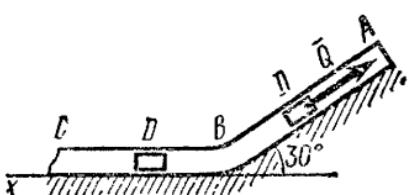


Рис. Д1.8

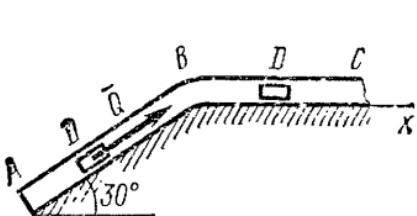


Рис. Д1.9

**Пример Д1.** На вертикальном участке  $AB$  трубы (рис. Д1) на груз  $D$  массой  $m$  действуют сила тяжести и сила сопротивления  $\bar{R}$ ; движение от точки  $A$ , где  $v_0=0$ , до точки  $B$  длится  $t_1$  с. На наклонном участке  $BC$  на груз действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу равен  $f$ ) и переменная сила  $\bar{F}=F(t)$ , заданная в ньютонах.

Дано:  $m=8$  кг,  $R=\mu v^2$ , где  $\mu=0,2$  кг/м,  $v_0=0$ ,  $t_1=2$  с,  $f=0,2$ ,  $F_x=16 \sin(4t)$ ,  $\alpha=30^\circ$ . Определить:  $x=f(t)$  — закон движения груза на участке  $BC$ .

**Решение.** 1. Рассмотрим движение груза на участке  $AB$ , считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы  $\bar{P}=mg$  и  $\bar{R}$ . Проводим ось  $Az$  и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m \frac{dv_z}{dt} = \Sigma F_{kz} \text{ или } m \frac{dv_z}{dt} = P_z + R_z. \quad (1)$$

Рис. Д1

Далее находим  $P_z=P=mg$ ,  $R_z=-R=-\mu v^2$ ; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что  $v_z=v$ , получим

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \mu v^2 \text{ или } \frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{m} \left( \frac{mg}{\mu} - v^2 \right). \quad (2)$$

Введем для сокращения записей обозначение

$$n^2 = \frac{mg}{\mu} = 400 \quad (n = 20 \text{ м/с}), \quad (3)$$

где при подсчете принято  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ . Тогда, разделяя в уравнении (2) переменные и взяв затем от обеих частей равенства интегралы, получим

$$\frac{dv}{n^2 - v^2} = \frac{\mu}{m} dt \text{ и } \frac{1}{2n} \ln \frac{n+v}{n-v} = \frac{\mu}{m} t + C_1. \quad (4)$$

По начальным условиям при  $t=0$   $v=v_0=0$ , что дает  $C_1=(1/2n) \cdot \ln 1=0$ . Введя еще одно обозначение

$$k = n \frac{\mu}{m} = 0,5 \text{ с}^{-1}, \quad (5)$$

получим из (4)

$$\ln \frac{n+v}{n-v} = 2kt \text{ и } \frac{n+v}{n-v} = e^{2kt}.$$

Отсюда находим, что

$$v = n \frac{e^{2kt} - 1}{e^{2kt} + 1}. \quad (6)$$

Полагая здесь  $t=t_1=2$  с и заменяя  $n$  и  $k$  их значениями (3) и (5), определим скорость  $v_B$  груза в точке  $B$  (число  $e=2,7$ ):

$$v_B = 20 \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = 15,2 \text{ м/с.} \quad (7)$$

2. Рассмотрим движение груза на участке  $BC$ ; найденная скорость  $v_B$  будет для движения на этом участке начальной скоростью ( $v_0=v_B$ ). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы  $\bar{P}=mg$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}}$  и  $\bar{F}$ . Проведем из точки  $B$  оси  $Bx$  и  $By$  и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось  $Bx$ :

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= P_x + N_x + F_{\text{тр}x} + F_x \text{ или} \\ m \frac{dv_x}{dt} &= mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} + F_x, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $F_{\text{тр}}=fN$ . Для определения  $N$  составим уравнение в проекции на ось  $By$ . Так как  $a_y=0$ , получим  $0=N-mg \cos \alpha$ , откуда  $N=mg \cos \alpha$ . Следовательно,  $F_{\text{тр}}=f mg \cos \alpha$ ; кроме того,  $F_x=-16 \sin(4t)$  и уравнение (8) примет вид

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha) + 16 \sin(4t). \quad (9)$$

Разделив обе части равенства на  $m$ , вычислим  $g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = g(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2$ ;  $16/m=2$  и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 3,2 + 2 \sin(4t). \quad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на  $dt$  и интегрируя, пайдем

$$v_x = 3,2t - \frac{1}{2} \cos(4t) + C_2. \quad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке  $B$ , считая в этот момент  $t=0$ . Тогда при  $t=0$   $v=v_0=v_B$ , где  $v_B$  дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = v_B + 0,5 \cos 0 = 15,2 + 0,5 = 15,7.$$

При найденном значении  $C_2$  уравнение (11) дает

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t - 0,5 \cos(4t) + 15,7. \quad (12)$$

Умножая здесь обе части на  $dt$  и снова интегрируя, пайдем

$$x = 1,6t^2 - 0,13 \sin(4t) + 15,7t + C_3. \quad (13)$$

Так как при  $t=0$   $x=0$ , то  $C_3=0$  и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1,6t^2 + 15,7t - 0,13 \sin(4t), \quad (14)$$

где  $x$  — в метрах,  $t$  — в секундах.

## Задача Д2

Груз 1 массой  $m$  укреплен на пружинной подвеске в лифте (рис. Д2.0—Д2.9, табл. Д2). Лифт движется вертикально по закону  $\xi = 1/2(\alpha_1 t^2) + \alpha_2 \sin(\omega t) + \alpha_3 \cos(\omega t)$  (ось  $\xi$  направлена по вертикали вверх;  $\xi$  выражено в метрах,  $t$  — в секундах). На груз действует сила сопротивления среды  $R = \mu v$ , где  $v$  — скорость груза по отношению к лифту.

Найти закон движения груза по отношению к лифту, т. е.  $x = f(t)$ ; начало координат почестить в положении статического равновесия груза при неподвижном лифте (во избежание ошибок в знаках, направить ось  $x$  в сторону удлинения пружины, а груз изобразить в положении, при котором  $x > 0$  и пружина растянута). При подсчетах можно принять  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ . Массой пружин и соединительной пластины 2 пренебречь.

В таблице обозначено:  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  — коэффициенты жесткости пружин,  $\lambda_0$  — удлинение пружины с эквивалентной жесткостью в начальный момент времени  $t=0$ ,  $v_0$  — начальная скорость груза по отношению к лифту (направлена вертикально вверх). Прочерк в столбцах  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  означает, что соответствующая пружина отсутствует и на чертеже изображаться не должна. Если при этом конец одной из оставшихся пружин окажется свободным, его следует прикрепить в соответствующем месте или к грузу или к потолку (полу) лифта; то же следует сделать, если свободными окажутся соединенные пластины 2 концы обеих оставшихся пружин.

Условие  $\mu=0$  означает, что сила сопротивления  $R$  отсутствует.

**Указания.** Задача Д2 охватывает одновременно темы относительное движение и колебания материальной точки. Сначала нужно составить дифференциальное уравнение относительного движения (по отношению к лифту) рассматриваемого в задаче груза, для чего присоединить к действующим силам переносную силу инерции. При этом заменить подвеску одной пружиной с жесткостью, эквивалентной жесткости подвески. Затем проинтегрировать полученнное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, учтя начальные условия.

Таблица Д2

Номер условия	$m$ , кг	$c_1$ , Н/м	$c_2$ , Н/м	$c_3$ , Н/м	$\alpha_1$ , $\text{м}/\text{с}^2$	$\alpha_2$ , м	$\alpha_3$ , м	$\omega$ , $1/\text{с}$	$\mu$ , $\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}$	$\lambda_0$ , м	$v_0$ , $\text{м}/\text{с}$
0	1	300	150	—	0	0,1	0	15	0	0	0
1	0,8	—	240	120	$-1,5g$	0	0	—	8	0,1	0
2	0,5	—	100	150	0	0,8	0	5	0	0	4
3	1	240	—	160	0	0	0,5	6	0	0	0
4	0,5	80	120	—	$-g$	0	0	—	6	0,15	0
5	2	—	400	400	0	0	0,1	16	0	0	0
6	0,4	60	—	120	$g$	0	0	—	4	0	2
7	0,5	120	—	180	0	0,1	0	20	0	0	0
8	0,4	50	200	—	0	0	0,2	20	0	0,15	0
9	1	200	—	300	$1,5g$	0	0	—	20	0	3

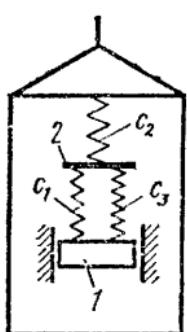


Рис. Д2.0

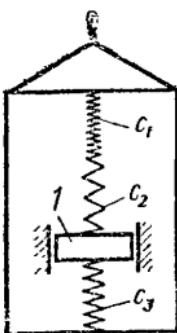


Рис. Д2.1

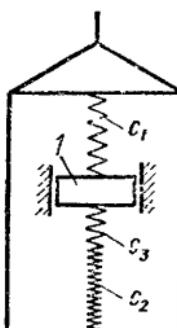


Рис. Д2.2

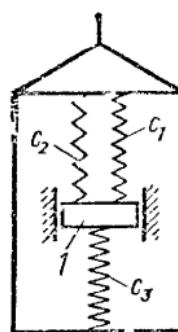


Рис. Д2.3

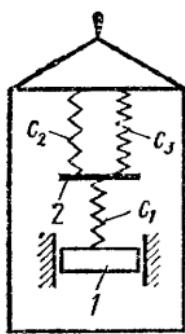


Рис. Д2.4

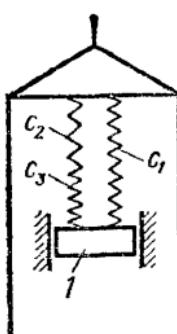


Рис. Д2.5

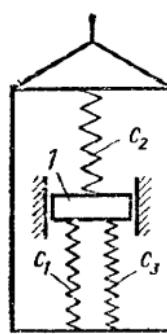


Рис. Д2.6

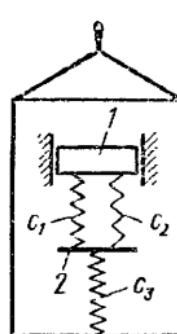


Рис. Д2.7

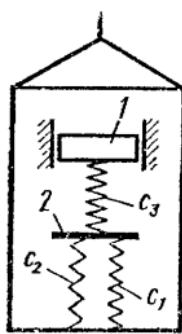


Рис. Д2.8

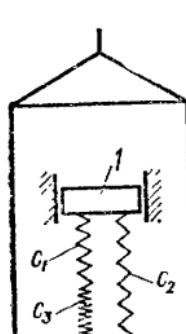


Рис. Д2.9

**Пример Д2.** Груз  $D$  массой  $m$ , прикрепленный к двум последовательно соединенным пружинам с коэффициентами жесткости  $c_1$  и  $c_2$ , перемещается по пазу  $AB$  призматической тележки (рис. Д2, а). Тележка движется по закону  $\xi = f_1(t)$ . Начальное удлинение пружины с эквивалентной жесткостью  $\lambda_0$ , а начальная скорость груза по отношению к тележке  $v_0$  (направлена от  $D$  к  $B$ ).

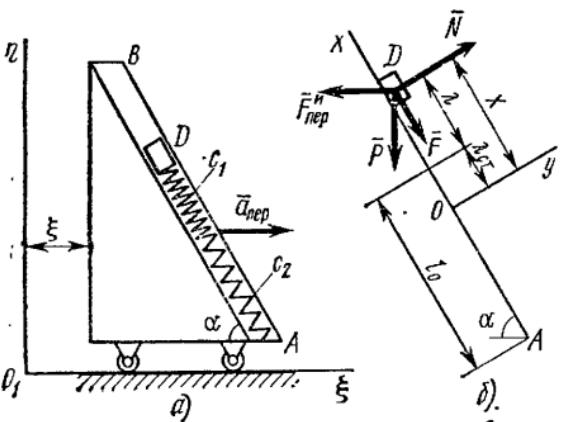


Рис. Д2

Дано:  $m=0,4$  кг,  $c_1=200$  Н/м,  $c_2=50$  Н/м,  $\lambda_0=0,1$  м,  $v_0=1$  м/с,  $\alpha=60^\circ$ ,  $\xi=2t^2+0,4 \sin(4t)$  (1) ( $\xi$  — в метрах,  $t$  — в секундах).

Определить:  $x=f(t)$  — закон движения груза по отношению к тележке.

**Решение.** 1. Заменим прикрепленные к грузу пружины одной эквивалентной пружиной с коэффициентом жесткости  $c_{эк}=c$ . Значе-

ние  $c$  здесь определяется из условия, что при равновесии под действием какой-нибудь приложенной к свободному концу пружин силы  $Q$  усилия в любом поперечном сечении пружин одинаковы и равны  $Q$ . Тогда если удлинение пружин равны соответственно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то удлинение эквивалентной пружины  $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$  и должно быть  $c_1\lambda_1=c_2\lambda_2=c\lambda=Q$ , откуда  $\lambda_1=Q/c_1$ ,  $\lambda_2=Q/c_2$ ,  $\lambda=Q/c$ . Но так как  $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ , то

$$\frac{Q}{c} = \frac{Q}{c_1} + \frac{Q}{c_2} \text{ и } c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 40 \text{ Н/м.} \quad (2)$$

2. Составим теперь дифференциальное уравнение относительного движения груза (по отношению к тележке). Сначала заметим, что при неподвижной тележке в положении статического равновесия груза эквивалентная пружина (длину ее в недеформированном состоянии обозначим  $l_0$ ) под действием силы тяжести  $\bar{P}$  будет сжата на величину  $\lambda_{ст}$  (рис. Д2, б). Из условия равновесия следует, что

$$c\lambda_{ст} = P \sin \alpha \text{ и } \lambda_{ст} = \frac{mg \sin \alpha}{c} = 0,08 \text{ м.} \quad (3)$$

Связем тогда с тележкой подвижную систему отсчета  $Oxy$ , начало  $O$  которой поместим в положении статического равновесия груза, а ось  $Ox$  направим вдоль паза  $AB$  в сторону удлинения пружины (рис. Д2, б). Рассмотрим груз в положении, при котором  $x>0$  и пружина растянута; изобразим действующие на груз силы: силу тяжести  $\bar{P}$ , силу упругости  $\bar{F}$  и реакцию паза  $\bar{N}$ . Для составления уравнения относительного движения груза присоединим к этим силам переносную силу инерции  $\bar{F}_{пер}^i = -ma_{пер}$ : кориолисова сила инерции здесь равна нулю, так как переносное движение (движение тележки) является поступательным. Тогда уравнение отно-

сительного движения в векторной форме будет иметь вид

$$\tilde{m\ddot{a}_{\text{от}}} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{пер}}^{\text{u}}.$$

Проектируя обе его части на ось  $x$ , получим

$$m\ddot{x} = -P \sin \alpha - F + F_{\text{пер}}^{\text{u}} \cos \alpha. \quad (1)$$

Найдем значения  $F$  и  $F_{\text{пер}}^{\text{u}}$ . Так как при положении груза, определяемом координатой  $x > 0$  (рис. Д2, б), эквивалентная пружина имеет удлинение  $\lambda = x - \lambda_{\text{ст}}$ , то  $F = c\lambda = c(x - \lambda_{\text{ст}})$ . Далее  $F_{\text{пер}}^{\text{u}} = m\ddot{a}_{\text{пер}} = m\ddot{\xi}$ , где  $\ddot{\xi}$  — ускорение тележки. Из равенства (1) находим, что  $\ddot{\xi} = 4 - 6,4 \sin(4t)$ . Кроме того,  $\cos \alpha = 0,5$ . Подставляя все эти величины в уравнение (4), получим

$$m\ddot{x} = -P \sin \alpha - c(x - \lambda_{\text{ст}}) + m[2 - 3,2 \sin(4t)].$$

Согласно равенству (3) члены  $-P \sin \alpha$  и  $c\lambda_{\text{ст}}$  в правой части сокращаются, и окончательно дифференциальное уравнение относительного движения груза примет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = b_1 + b_2 \sin(4t), \quad (5)$$

где обозначено

$$k^2 = c/m = 100 \text{с}^{-2}, \quad b_1 = 2 \text{ м/с}^2, \quad b_2 = -3,2 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

2. Для определения закона движения груза надо проинтегрировать уравнение (5). Его общее решение, как известно из теории дифференциальных уравнений:

$$x = x_1 + x_2, \quad (7)$$

где  $x_1$  — общее решение однородного уравнения  $\ddot{x} + k^2 x = 0$ , т. е.

$$x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt), \quad (8)$$

а  $x_2$  — частное решение уравнения (5). Учитывая, каковы правая и левая части этого уравнения, ищем  $x_2$  в виде

$$x_2 = A + B \sin(4t). \quad (9)$$

Для определения постоянных  $A$  и  $B$  находим  $\ddot{x}_2 = -16B \sin(4t)$ , подставляем значения  $\ddot{x}_2$  и  $x_2$  в уравнение (5) и приравниваем в его обеих частях свободные члены и коэффициенты при  $\sin(4t)$ . В результате, принимая во внимание обозначения (6), получим

$$A = \frac{b_1}{k^2} = 0,02 \text{ м}, \quad B = \frac{b_2}{k^2 - 16} = -0,04 \text{ м}.$$

Тогда из равенств (7) — (9), учитывая, что  $k = 10 \text{ с}^{-1}$ , получим следующее общее решение уравнения (5):

$$x = C_1 \sin(10t) + C_2 \cos(10t) - 0,04 \sin(4t) + 0,02. \quad (10)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем еще  $v_x=x$ ;

$$v_x = 10C_1 \cos(10t) - 10C_2 \sin(10t) = 0,16 \cos(4t). \quad (11)$$

По условиям задачи при  $t=0$   $v_x=v_0=1$  м/с,  $\lambda=\lambda_0=0,1$  м. Тогда, как видно из рис. Д2, б и равенства (3),  $x_0=\lambda_0+\lambda_{\text{ст}}=0,18$  м. Подставив эти начальные данные в уравнения (10) и (11), найдем из них, что  $C_1=0,12$ ,  $C_2=0,16$ . В результате уравнение (10) примет окончательно вид

$$x = 0,12 \sin(10t) + 0,16 \cos(10t) - 0,04 \sin(4t) + 0,02. \quad (12)$$

Это уравнение и определяет искомый закон относительного движения груза, т. е. закон совершаемых им колебаний.

Приложения: 1. Если груз был бы прикреплен к двум параллельным пружинам, то при равновесии под действием некоторой силы  $Q$  каждая из пружин и эквивалентная пружина имели бы одно и то же удлинение  $\lambda$ . Тогда для двух пружин  $c_1\lambda+c_2\lambda=Q$ , а для эквивалентной пружины  $c\lambda=Q$ ; отсюда и определяется значение  $c_{\text{эк}}=c=c_1+c_2$ .

2. Если пружины были бы прикреплены к тележке в точке  $B$  (рис. Д2, а), а груз  $D$  находился на другом их конце, то в положении статического равновесия эквивалентная пружина была бы растянута на величину  $\lambda_{\text{ст}}$ , а не сжата, что следует учесть при изображении схемы, подобной показанной на рис. Д2, б, и при определении зависимости между  $x$ ,  $\lambda$  и  $\lambda_{\text{ст}}$  (в этом случае  $\lambda=x+\lambda_{\text{ст}}$ ).

### Задача Д3

Тонкий гладкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, изогнут так, что состоит из прямолинейного участка и двух дуг окружностей радиуса  $R=0,5$  м,  $r=0,6R$ , сопряженных в точке  $K$  (рис. Д3.0—Д3.9, табл. Д3). На стержень нанизан шар весом  $P$ , прикрепленный к пружине с коэффициентом жесткости  $c=k(P/R)$ ; другой конец пружины закреплен в точке  $O$ . Длина пружины в недеформированном состоянии равна  $l_0$ .

Шар начинает двигаться без начальной скорости из положения  $B_0$ , определяемого углом  $\alpha$  (при  $\alpha=90^\circ$  считать шар чуть смещенным от равновесного положения в сторону точки  $B_1$ ); достигнув точки  $B_1$ , указанной на рисунке, шар освобождается от пружины и дальше движется под действием только силы тяжести.

Считая шар материальной точкой, определить, какую скорость он будет иметь, придя в точку  $D$ , и с какой силой будет давить на стержень в этой точке (силу давления выразить через вес  $P$  шара). Положение точки  $D$ , когда она находится на дуге радиуса  $R$ , определяется углом  $\beta$ , а на дуге радиуса  $r$  — углом  $\gamma$ . На рис. 2 и 3  $B_1$  произвольная точка дуги  $ED$ .

**Указания.** Задача Д3 — на применение теоремы об изменении кинетической энергии точки. Решая задачу, учесть, что теорему можно применить сразу на всем перемещении, совершающем шаром от начального положения до положения, в котором надо определить его скорость. Когда скорость найдена, для определения силы давления шара на стержень изобразить шар в том положении, в котором эту силу надо определить, и составить уравнение движения в проекции на нормаль к траектории, направленную к центру соответствующей окружности, т. е. уравнение  $mv^2/\rho = \Sigma F_{\text{нп}}$ .

Таблица Д3

Номер условия	Для рис. 0—3					Для рис. 4—9				
	$I_0$	$k$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$I_0$	$k$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
			град	град	град			град	град	град
0	$0,8R$	8	30	45	—	$2,8R$	8	45	60	—
1	$0,8R$	36	45	—	60	$2,4R$	6	90	—	60
2	$0,4R$	15	60	90	—	$2,2R$	12	60	30	—
3	$0,7R$	6	30	—	0	$2,8R$	4	90	—	30
4	$0,6R$	12	45	90	—	$2,4R$	6	60	90	—
5	$0,4R$	10	45	—	30	$2,6R$	10	45	—	0
6	$0,7R$	50	60	30	—	$2,2R$	10	90	45	—
7	$0,9R$	12	30	—	90	$2,5R$	8	60	—	45
8	$0,7R$	20	45	60	—	$2,6R$	5	90	60	—
9	$0,6R$	30	60	—	45	$3R$	5	45	—	90

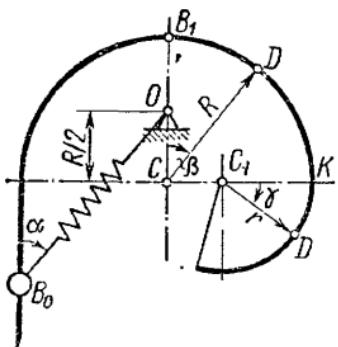


Рис. Д3.0

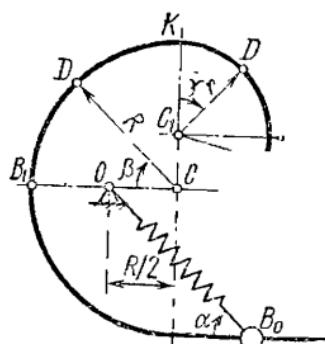


Рис. Д3.1

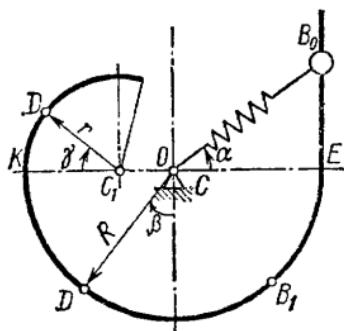


Рис. Д3.2

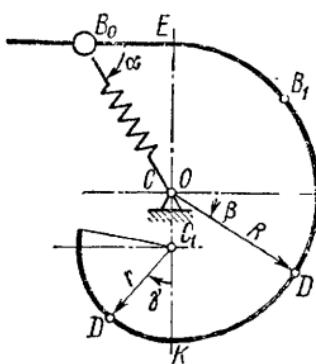


Рис. Д3.3

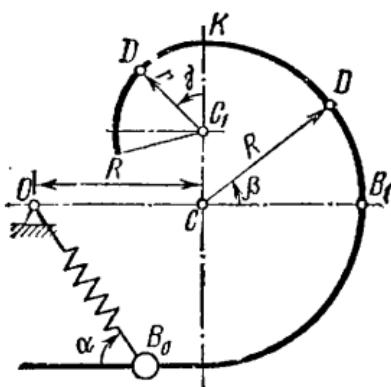


Рис. Д3.4

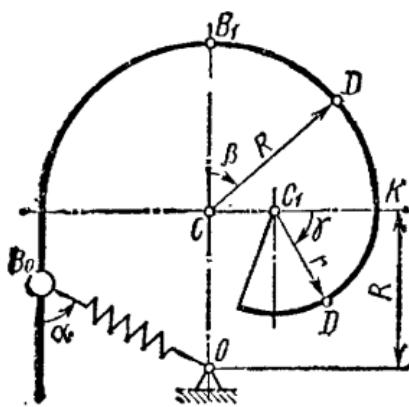


Рис. Д3.5

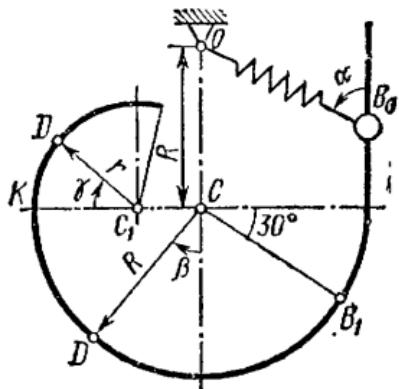


Рис. Д3.6

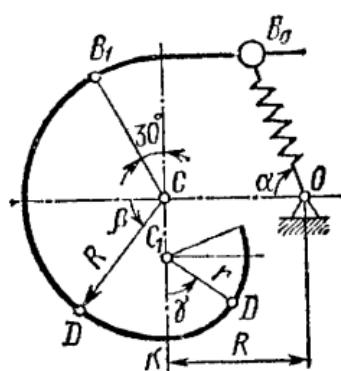


Рис. Д3.7

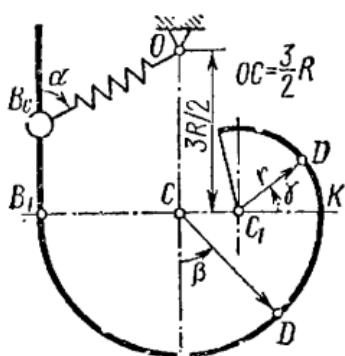


Рис. Д3.8

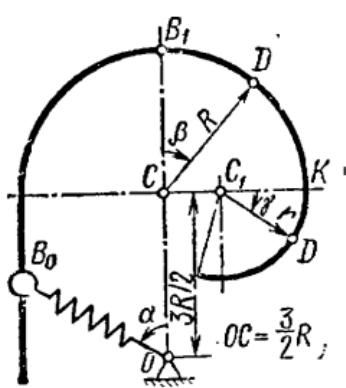


Рис. Д3.9

**Пример Д3.** Шар весом  $P$  падает на расположенный в вертикальной плоскости гладкий стержень, изогнутый так, что часть  $BD$  его является дугой окружности радиуса  $R$  (рис. Д3). К шару присоединена пружина с коэффициентом жесткости  $c$ ; длина не деформированной пружины равна  $l_0$ . Движение шара начинается из точки  $B_0$ , находящейся на высоте  $H$ ; в точке  $B$  шар освобождается от пружины и движется дальше по дуге  $BD$ .

Дано:  $P = 0,6 \text{ м}$ ,  $l_0 = 1,5R$ ,  $c = k \frac{P}{R}$  ( $k = 10$ ),  $H = 2R$ ,  $v_0 = 0$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ,  $OC = 0,75R$ .

Определить: 1)  $v_1$  — скорость шара в точке  $B_1$  ( $\angle BCB_1 = \varphi$ ); 2)  $Q_1$  — силу давления шара на стержень в точке  $B_1$ .

**Решение.** 1. Для определения  $v_1$  рассмотрим шар в произвольном положении; изобразим действующие на него силы  $\bar{P}$  (сила тяжести),  $\bar{N}$  (реакция стержня),  $\bar{F}$  (сила упругости пружины, действующая на участке  $B_0B$ ) и применим теорему об изменении кинетической энергии точки на пути  $B_0B_1$  (считая шар точкой):

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A(\bar{P}) + A(\bar{F}) + A(\bar{N}). \quad (1)$$

Так как реакция  $\bar{N}$  перпендикулярна перемещению, то  $A(\bar{N}) = 0$ . Работа силы тяжести  $A(\bar{P}) = P \cdot h$ , где при  $H = 2R$  и  $\varphi = 60^\circ$  будет  $h = H - R + R \cos \varphi = 1,5R$  и  $A(\bar{P}) = 1,5PR$ .

Работа силы упругости  $\bar{F}$  на перемещении  $B_0B$  определяется по формуле

$$A(\bar{F}) = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2) = \frac{kP}{2R} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2), \quad (2)$$

где  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  — начальное и конечное удлинения пружины т. е.  $\lambda_0 = OB_0 - l_0$ ,  $\lambda_1 = OB - l_0$  ( $l_0 = 1,5R$ ). Из треугольников  $OEB_0$  и  $OCB$

$$OB_0 = \frac{B_0E}{\cos \alpha} = \frac{H - R}{\cos 60^\circ} = 2R, \quad OB = \sqrt{(BC)^2 + (OC)^2} = \frac{5}{4}R.$$

Тогда  $\lambda_0 = 0,5R$ ,  $\lambda_1 = -0,25R$  и равенство (2), где  $k = 10$ , дает окончательно  $A(\bar{F}) = 0,94PR$ .

Подставляя найденные значения работ в уравнение (1) и учитывая, что  $v_0 = 0$ , а  $m = P/g$ , определим из него искомую скорость:

$$v_1 = \sqrt{4,88gR} = 5,36 \text{ м/с.} \quad (3)$$

2. Для определения искомой силы давления рассмотрим шар в том положении, в котором надо ее найти, т. е. в точке  $B_1$ , и изо-

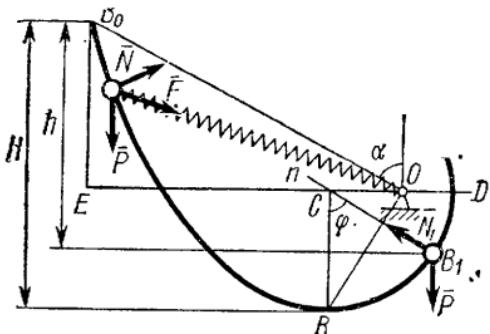


Рис. Д3

бразим действующие на шар силу  $\bar{P}$  и реакцию  $\bar{N}_1$ . Проведем нормаль  $B_1n$  к траектории в сторону ее вогнутости и, воспользовавшись векторным уравнением  $\bar{ma} = \bar{P} + \bar{N}_1$ , спроектируем обе его части на эту нормаль. Так как  $a_n = v^2/\rho$ , получим

$$\frac{mv_1^2}{R} = -P \cos \varphi + N_1. \quad (4)$$

По из равенства (3) следует, что  $mv_1^2 = 4,88 PR$ . Подставляя это значение в уравнение (4), найдем, что  $N_1 = 5,38P$ .

Сила давления шара на стержень численно равна  $N_1$ , но направлена в противоположную сторону. Ответ:  $v_1 = 5,36$  м/с;  $Q_1 = 5,38 P$ .

### Задача Д4

Механическая система состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней  $R_3 = 0,3$  м,  $r_3 = 0,1$  м и радиусом инерции относительно оси вращения  $\rho_3 = 0,2$  м, блока 4 радиуса  $R_4 = 0,2$  м и катка (или подвижного блока) 5 (рис. Д4.0—Д4.9, табл. Д4); тело 5 считать сплошным одиородным цилиндром, а массу блока 4—равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость  $f = 0,1$ . Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости  $c$ .

Под действием силы  $F = f(s)$ , зависящей от перемещения  $s$  точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент  $M$  сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение  $s$  станет равным  $s_1 = 0,2$  м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы, где обозначено:  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_{C5}$  — скорости грузов 1, 2 и центра масс тела 5 соответственно,  $\omega_3$  и  $\omega_4$  — угловые скорости тел 3 и 4.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток 5 на рис. 1), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз 2, если  $m_2 = 0$ ; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

**Указания.** Задача Д4 — на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия  $T$  системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении  $T$  для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение  $s_1$ , учитя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Таблица Д4

Номер условия	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$m_3$ , кг	$m_4$ , кг	$m_5$ , кг	$c$ , Н/м	$M$ , Н·м	$F=f(s)$ , Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	80 (4+5 s)	$\omega_3$
1	8	0	0	4	6	320	0,8	50 (8+3 s)	$v_1$
2	0	4	6	0	5	240	1,4	60 (6+5 s)	$v_2$
3	0	6	0	5	4	300	1,8	80 (5+6 s)	$\omega_4$
4	5	0	4	0	6	240	1,2	40 (9+4 s)	$v_4$
5	0	5	0	6	4	200	1,6	50 (7+8 s)	$v_{C5}$
6	8	0	5	0	6	280	0,8	40 (8+9 s)	$\omega_3$
7	0	4	0	6	5	300	1,5	60 (8+5 s)	$v_2$
8	4	0	0	5	6	320	1,4	50 (9+2 s)	$\omega_4$
9	0	5	6	0	4	280	1,6	80 (6+7 s)	$v_{C5}$

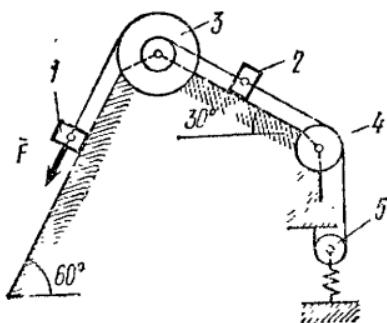


Рис. Д4.0

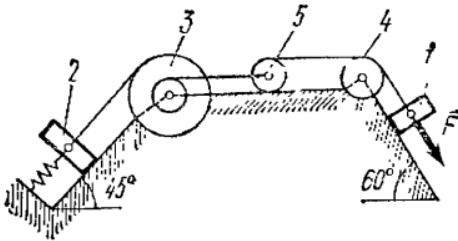


Рис. Д4.1

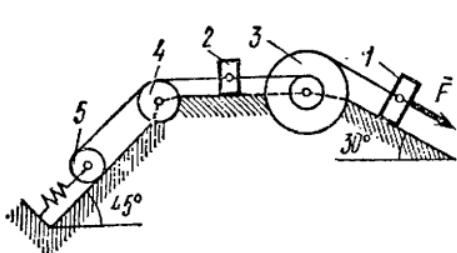


Рис. Д4.2

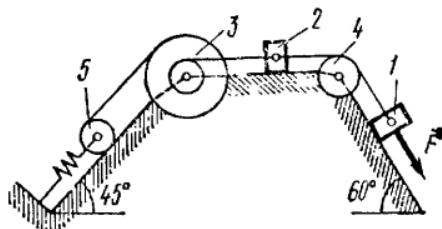


Рис. Д4.3

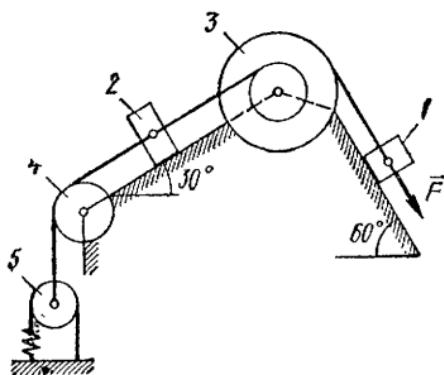


Рис. Д4.4

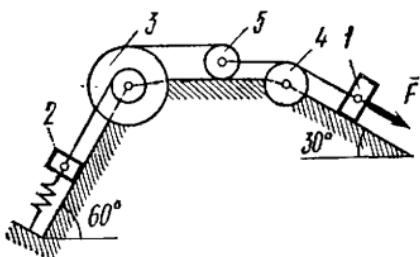


Рис. Д4.5

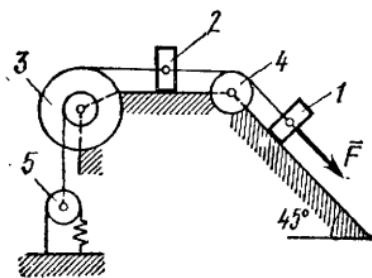


Рис. Д4.6

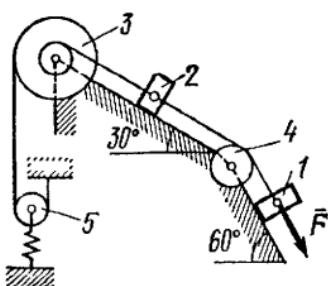


Рис. Д4.7

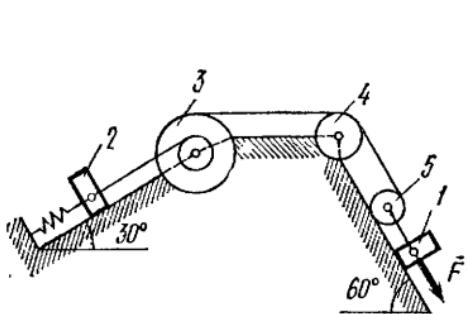


Рис. Д4.8

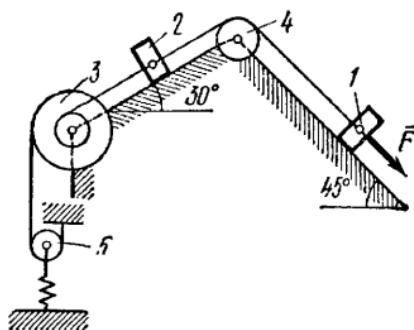


Рис. Д4.9

**Пример Д4.** Механическая система (рис. Д4, а) состоит из силошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней  $R_3$  и  $r_3$  и радиусом инерции относительно оси вращения  $r_3$ , блока 4 и груза 5

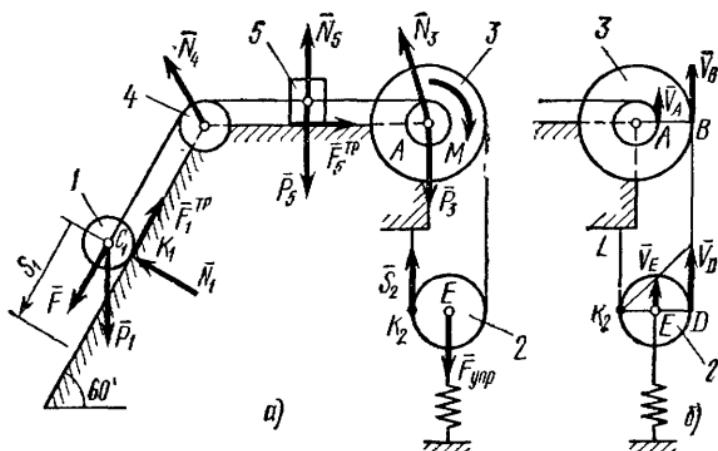


Рис. Д4 а, б

(коэффициент трения груза о плоскость равен  $f$ ). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3. К центру Е блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости  $c$ ; ее начальная деформация равна нулю.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы  $F=f(s)$ , зависящей от перемещения  $s$  точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент  $M$  сил сопротивления.

Дано:  $m_1=8$  кг,  $m_2=0$ ,  $m_3=4$  кг,  $m_4=0$ ,  $m_5=10$  кг,  $R_3=0,3$  м,  $r_3=0,1$  м,  $\rho_3=0,2$  м,  $f=0,1$ ,  $c=240$  Н/м,  $M=0,6$  Н·м,  $F=20(3+2s)$  Н,  $s_1=0,2$  м.

Определить:  $\omega_3$  в тот момент времени, когда  $s=s_1$ .

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел 1, 3, 5 и невесомых тел 2, 4, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные  $\bar{F}$ ,  $\bar{F}_{yup}$ ,  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_3$ ,  $\bar{P}_5$ , реакции  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_3$ ,  $\bar{N}_4$ ,  $\bar{N}_5$ , натяжение нити  $\bar{S}_2$ , силы трения  $\bar{F}_1^{tp}$ ,  $\bar{F}_5^{tp}$  и момент  $M$ .

Для определения  $\omega_3$  воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \Sigma A_k^e. \quad (1)$$

2. Определяем  $T_0$  и  $T$ . Так как в начальный момент система находилась в покое, то  $T_0=0$ . Величина  $T$  равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5. \quad (2)$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 5 — поступательно, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2, \quad T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_3^2. \quad (3)$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую  $\omega_3$ . Для этого предварительно заметим, что  $v_{C1} = v_5 = v_A$ , где  $A$  — любая точка обода радиуса  $r_3$  шкива 3 и что точка  $K_1$  — мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим  $r_1$ . Тогда

$$v_{C1} = v_5 = \omega_3 r_3; \quad \omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}. \quad (4)$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0,5 m_1 r_1^2; \quad I_3 = m_3 \rho_3^2. \quad (5)$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно

$$T = \left( \frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \quad (6)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка  $C_1$  пройдет путь  $s_1$ . Введя обозначения:  $s_5$  — перемещение груза 5 ( $s_5 = s_1$ ),  $\varphi_3$  — угол поворота шкива 3,  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  — начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$\forall \quad A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 20(3+2s) ds = 20(3s_1 + s_1^2);$$

$$A(\bar{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ;$$

$$A(\bar{F}_5^{\text{тр}}) = -F_5^{\text{тр}} s_5 = -f P_5 s_1;$$

$$A(M) = -M \varphi_3; \quad A(\bar{F}_{\text{упр}}) = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки  $K_1$  и  $K_2$ , где приложены силы  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{F}_1^{\text{тр}}$  и  $\bar{S}_2$  — мгновенные центры скоростей; точки, где приложены  $\bar{P}_3$ ,  $\bar{N}_3$  и  $\bar{P}_4$  — неподвижны; а реакция  $\bar{N}_5$  перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи  $\lambda_0 = 0$ . Тогда  $\lambda_1 = s_E$ , где  $s_E$  — перемещение точки  $E$  (конца пружины). Величины  $s_E$  и  $\varphi_3$  надо выразить через заданное перемещение  $s_1$ ; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, поскольку  $\omega_3 = v_A/r_3 = v_{C1}/r_3$  (равенство  $v_{C1} = v_A$  уже отмечалось), то и  $\varphi_3 = s_1/r_3$ .

Далее, из рис. Д4, б видно, что  $v_D = v_B = \omega_3 R_3$ , а так как точка  $K_2$  является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катится» по участку нити  $K_2L$ ), то  $v_E = 0,5 v_D = 0,5 \omega_3 R_3$ , сле-

довательно, и  $\lambda_1 = s_E = 0,5 \varphi_3 R_3 = 0,5 s_1 R_3/r_3$ . При найденных значениях  $\varphi_3$  и  $\lambda_1$  для суммы всех вычислений работ получим

$$\Sigma A_K^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_5 s_1 - M \frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8} \frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2. \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что  $T_0=0$ , придем к равенству

$$\left( \frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2 = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_5 s_1 - \frac{M}{r_3} s_1 - \frac{c}{8} \frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2. \quad (8)$$

Из равенства (8), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость  $\omega_3$ . Ответ:  $\omega_3 = 8,1 \text{ с}^{-1}$ .

### Задача Д5

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты *I* массой  $m_1 = 18 \text{ кг}$ , движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза *D* массой  $m_2 = 6 \text{ кг}$  (рис. Д5.0—Д5.9, табл. Д5). В момент времени  $t_0 = 0$ , когда скорость плиты  $u_0 = 2 \text{ м/с}$ , груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу плиты.

На рис. 0—3 желоб *KE* прямолинейный и при движении груза расстояние  $s = AD$  изменяется по закону  $s = f_1(t)$ , а на рис. 4—9 желоб — окружность радиуса  $R = 0,8 \text{ м}$  и при движении груза угол  $\varphi = \angle AC_1D$  изменяется по закону  $\varphi = f_2(t)$ . В табл. Д5 эти зависимости даны отдельно для рис. 0 и 1, для рис. 2 и 3 и т. д., где  $s$  выражено в метрах,  $\varphi$  — в радианах,  $t$  — в секундах.

Считая груз материальной точкой и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить величину, указанную в таблице в столбце «Найти», где обозначено:  $x_1$  — перемещение плиты за время от  $t_0=0$  до  $t_1=1 \text{ с}$ ;  $u_1$ ,  $a_1$ ,  $N_1$  — значения в момент времени  $t_1=1 \text{ с}$  скорости плиты, ускорения плиты и полной нормальной реакции направляющих соответственно.

**Указания.** Задача Д5 на применение теорем о движении центра масс и об изменении количества движения системы. Первой теоремой удобнее пользоваться, когда надо найти перемещение (или закон движения) одного из тел системы, движущегося поступательно, а второй — когда надо найти скорость такого тела. При определении ускорения тела или реакции связи тоже удобнее воспользоваться первой теоремой.

Таблица Д5

Номер условия	$s=f_1(t)$		$\varphi=f_2(t)$		Найди
	рис. 0,1	рис. 2,3	рис. 4,5	рис. 6,7	
0	$0,4(2t^2 - 1)$	$0,2(1 - 3t^2)$	$\frac{\pi}{3}(3 - 2t^2)$	$\frac{\pi}{4}(1 - 3t^2)$	$\frac{\pi}{3}(1 - 4t^2)$
1	$0,8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	$0,4 \sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)$	$\frac{\pi}{3}(t^2 + 1)$	$\frac{\pi}{6}(t^2 - 3)$	$\frac{\pi}{4}t^2$
2	$0,2 \cos(\pi t^2)$	$1,8 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$\frac{\pi}{6}(1 + 2t^2)$	$\frac{\pi}{2}t^2$	$\pi(2 - t^2)$
3	$0,5(2 - 3t^2)$	$0,3(6t^2 - 5)$	$\frac{\pi}{3}(1 - 3t^2)$	$\frac{\pi}{6}(3 - 4t^2)$	$\frac{\pi}{4}(5t^2 - 1)$
4	$0,8 \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	$0,4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	$\frac{\pi}{2}(t^2 - 2)$	$\pi(2t^2 - 1)$	$\frac{\pi}{6}(4t^2 - 1)$
5	$0,6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$1,2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	$\frac{\pi}{3}(t^2 + 3)$	$\frac{\pi}{6}(5 - t^2)$	$\frac{\pi}{4}(t^2 + 2)$
6	$0,2(4 - 7t^2)$	$0,6(1 - 2t^2)$	$\frac{\pi}{6}(3 + 4t^2)$	$\frac{\pi}{3}t^2$	$\frac{\pi}{6}(3t^2 - 1)$
7	$1,2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	$0,6 \sin(\pi t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2 - 4)$	$\frac{\pi}{4}(5 - 3t^2)$	$\frac{\pi}{2}(t^2 + 1)$
8	$0,5 \sin(\pi t^2)$	$1,8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$\frac{\pi}{6}(t^2 + 2)$	$\frac{\pi}{4}(t^2 + 1)$	$\pi t^2$
9	$1,2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)$	$0,8 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$\frac{\pi}{4}(2 - t^2)$	$\frac{\pi}{6}(1 - 5t^2)$	$\frac{\pi}{3}(3 + t^2)$

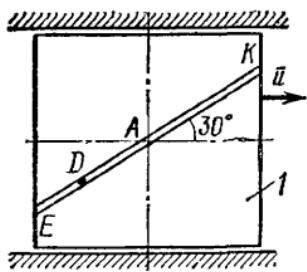


Рис. Д5.0

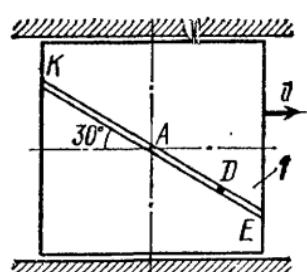


Рис. Д5.1

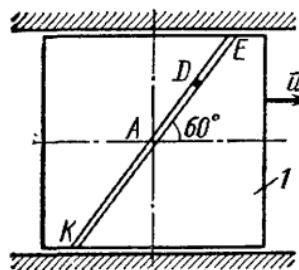


Рис. Д5.2

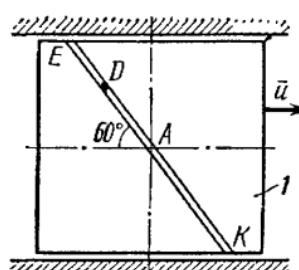


Рис. Д5.3

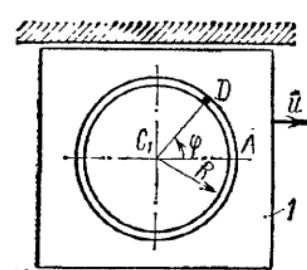


Рис. Д5.4

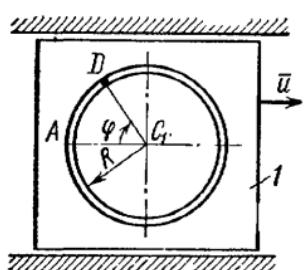


Рис. Д5.5

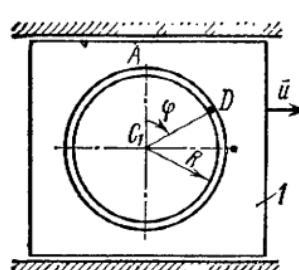


Рис. Д5.6

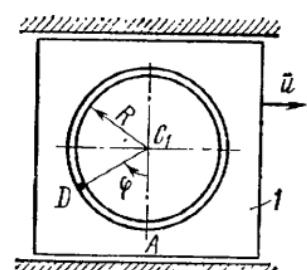


Рис. Д5.7

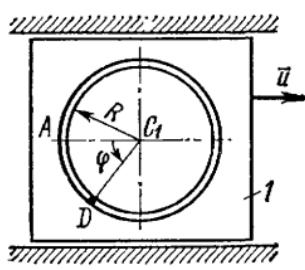


Рис. Д5.8

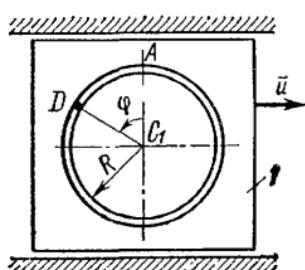


Рис. Д5.9

**Пример Д5.** В центре тяжести А тележки массой  $m_1$ , движущейся по гладкой горизонтальной плоскости, укреплен невесомый стержень  $AD$  длиной  $l$  с грузом  $D$  массой  $m_2$  на конце (рис. Д5, а).

В момент времени  $t_0=0$ , когда скорость тележки  $u_0$ , стержень  $AD$  начинает вращаться вокруг оси  $A$  по закону  $\varphi=\varphi(t)$ .

Дано:  $m_1=24$  кг,  $m_2=12$  кг,  $u_0=0.5$  м/с,  $l=0.6$  м,  $\varphi=(\pi/3)(1+2t^3)$  рад ( $t$  — в секундах).

Определить в момент времени  $t_1=1$  с: а) перемещение  $x_1$  тележки (перемещение за время от  $t_0=0$  до  $t_1=1$  с); б) ускорение  $a_1$  тележки; в) скорость  $u_1$  тележки; г) полную нормальную реакцию  $N_1$  плоскости.

**Решение.** Рассмотрим механическую систему, состоящую из тележки и груза  $D$ , в произвольном положении. Изобразим действующие на систему внешние силы:

силы тяжести  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$  и реакции плоскости  $\bar{N}'$ ,  $\bar{N}''$ . Проведем координатные оси  $Oxy$  так, чтобы ось  $y$  проходила через точку  $A_0$ , где находился центр масс тележки в момент времени  $t_0=0$ .

а) **Определение перемещения  $x_1$ .** Для определения  $x_1$  воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось  $x$ . Получим

$$\ddot{Mx}_C = \Sigma F_{kx}^e \text{ или } \ddot{Mx}_C = 0, \quad (1)$$

так как  $\Sigma F_{kx}^e = 0$ , поскольку все действующие на систему высшие силы вертикальны.

Определим значение  $Mx_C$ . Из рис. Д5, а видно, что в произвольный момент времени абсциссы  $x_A$  — центра масс тележки и  $x_D$  — груза равны соответственно:  $x_A = x$ ,  $x_D = x - l \sin \varphi$ . Так как по формуле, определяющей координату  $x_C$  центра масс системы,  $Mx_C = m_1 x_A + m_2 x_D$ , то

$$Mx_C = m_1 x + m_2 x - m_2 l \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right). \quad (2)$$

Теперь, проинтегрировав уравнение (1), найдем, что

$$\dot{Mx}_C = C_1; \quad Mx_C = C_1 t + C_2, \quad (3)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования. Подставив во второе из этих уравнений значение  $Mx_C$  из равенства (2), получим

$$(m_1 + m_2) x - m_2 l \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right) = C_1 t + C_2. \quad (4)$$

Для определения  $C_1$  и  $C_2$  понадобится еще одно уравнение, которое получим, продифференцировав обе части равенства (4) по времени:

$$(m_1 + m_2) \dot{x} - 2m_2 l \pi t^2 \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right) = C_1. \quad (5)$$

где  $\dot{x} = u$  — скорость тележки. По начальным условиям при  $t = 0$   $x = 0$ ,  $\dot{x} = u_0$ . Подставляя эти величины в равенства (4) и (5), найдем, что  $C_1 = (m_1 + m_2)u_0$ ,  $C_2 = -m_2 l \sin(\pi/3)$ . При этих значениях  $C_1$  и  $C_2$  уравнение (4) примет вид

$$(m_1 + m_2)x - m_2 l \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) = (m_1 + m_2)u_0 t - m_2 l \sin\frac{\pi}{3},$$

Отсюда получаем зависимость от времени координаты  $x$ , определяющей одновременно перемещение тележки:

$$x = u_0 t + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) - \sin\frac{\pi}{3} \right]. \quad (6)$$

Полагая здесь  $t = 1$  с, найдем искомое перемещение  $x_1$ . Ответ:  $x_1 = 0,33$  м.

**б) Определение ускорения  $a_1$ .** Проделав те же рассуждения и выкладки, что и в предыдущем примере, получим уравнение (1) и формулу (2). Для определения  $a_1$  продифференцируем дважды по времени обе части равенства (2). Получим

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= (m_1 + m_2)\ddot{x} - 2m_2 l \pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right); \\ M\ddot{x}_C &= (m_1 + m_2)\ddot{x} - 4m_2 l \pi t \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) + \\ &\quad + 4m_2 l \pi^2 t^4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right), \end{aligned}$$

где  $\ddot{x} = a$  — ускорение тележки. Но согласно уравнению (1)  $M\ddot{x}_C = 0$ ; в результате находим следующую зависимость  $a$  от времени:

$$a = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \left[ 4\pi t \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) - 4\pi^2 t^4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) \right].$$

Полагая здесь  $t = 1$  с, определим искомое ускорение  $a_1$ . Ответ:  $a_1 = -2,51$  м/с<sup>2</sup>. Знак минус указывает, что ускорение тележки направлено влево.

**в) Определение скорости  $u_1$ .** Чтобы определить  $u_1$ , воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы  $\bar{Q}$  в проекции на ось  $x$ . Так как все действующие на систему внешние силы вертикальны (рис. Д5, б), то  $\Sigma F_{kx}^e = 0$  и теорема дает

$$\frac{dQ_x}{dt} = \Sigma F_{kx}^e = 0, \text{ откуда } Q_x = C_1. \quad (1)$$

Для рассматриваемой механической системы  $\bar{Q} = \bar{Q}^r + \bar{Q}^D$ , где  $\bar{Q}^r = m_1 \bar{u}$  и  $\bar{Q}^D = m_2 \bar{v}_D$  — количества движения тележки и груза  $D$  соответственно ( $\bar{u}$  — скорость тележки,  $\bar{v}_D$  — скорость груза по от-

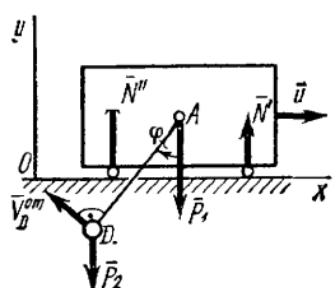


Рис. Д5б

иошению к осям  $Oxy$ ). Тогда из равенства (1) следует, что

$$Q_x^r + Q_x^D = C_1 \text{ или } m_1 u_x + m_2 v_{Dx} = C_1. \quad (2)$$

Для определения  $v_{Dx}$  рассмотрим движение груза  $D$  как сложное, считая его движение по отношению к тележке относительным (это движение, совершающееся при вращении стержня  $AD$  вокруг оси  $A$ ), а движение самой тележки — переносным. Тогда  $v_D = \bar{v}_D^{\text{пер}} + \bar{v}_D^{\text{от}}$  и

$$v_{Dx} = \bar{v}_{Dx}^{\text{пер}} + \bar{v}_{Dx}^{\text{от}}. \quad (3)$$

Но  $\bar{v}_D^{\text{пер}} = \bar{u}$  и, следовательно,  $\bar{v}_{Dx}^{\text{пер}} = \bar{u}_x$ . Вектор  $\bar{v}_D^{\text{от}}$  направлен перпендикулярно стержню и численно  $v_D^{\text{от}} = l\omega_{AD} = l\dot{\varphi} = 2l\pi t^2$ .

Изобразив этот вектор на рис. Д5, б с учетом знака  $\varphi$ , найдем, что  $v_{Dx}^{\text{от}} = -v_D^{\text{от}} \cos \varphi$ . Окончательно из равенства (3) получим

$$v_{Dx} = u_x - v_D^{\text{от}} \cos \varphi = u_x - 2l\pi t^2 \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right). \quad (4)$$

(В данной задаче величину  $v_{Dx}$  можно еще найти другим путем, определив абсциссу  $x_D$  груза  $D$ , для которой, как видно из рис. Д5, а, получим  $x_D = x - l \sin \varphi$ ; тогда  $v_{Dx} = x_D = \dot{x} - l \dot{\varphi} \cos \varphi$ , где  $\dot{x} = u_x$ , а  $\dot{\varphi} = 2\pi t^2$ .)

При найденном значении  $v_{Dx}$  равенство (2), если учесть, что  $u_x = u$ , примет вид

$$m_1 u + m_2 u - m_2 2l\pi t^2 \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right) = C_1. \quad (5)$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  определим по начальным условиям: при  $t = 0$   $u = u_0$ . Подстановка этих величин в уравнение (5) дает  $C_1 = (m_1 + m_2) u_0$  и тогда из (5) получим

$$(m_1 + m_2) u - 2m_2 l\pi t^2 \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right) = (m_1 + m_2) u_0.$$

Отсюда находим следующую зависимость скорости  $u$  тележки от времени:

$$u = u_0 + \frac{2l\pi m_2}{m_1 + m_2} t^2 \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right). \quad (6)$$

Положив в уравнении (6)  $t = 1$  с, определим искомую скорость  $u_1$ . Ответ:  $u_1 = -0,76$  м/с. Знак минус указывает, что скорость тележки направлена влево.

г) Определение реакции  $N_1$ . Для определения  $N_1$  воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось  $y$  (см. рис. Д5, а):

$$\ddot{M}y_C = \Sigma F_{ky}^e \text{ или } M\ddot{y}_C = N' + N'' - P_1 - P_2. \quad (1)$$

Отсюда полагая  $N' + N'' = N$ , получим

$$N = \ddot{My}_C + P_1 + P_2. \quad (2)$$

Из формулы, определяющей ординату  $y_C$  центра масс системы,  $My_C = m_1 y_A + m_2 y_D$ , где  $y_A$  и  $y_D$  — соответственно ординаты центра масс  $A$  тележки и груза  $D$ . В нашем случае  $y_A = A_0 O = \text{const}$ ,  $y_D = A_0 O - l \cos \varphi$ . Тогда

$$My_C = (m_1 + m_2) A_0 O - m_2 l \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right).$$

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, получим

$$\dot{My}_C = 2m_2 l \pi t^2 \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right);$$

$$\ddot{My}_C = 4m_2 l \pi t \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right) + 4m_2 l \pi^2 t^4 \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right).$$

Подставив найденное выражение  $\ddot{My}_C$  в уравнение (2), получим зависимость  $N$  от  $t$ :

$$N = 4m_2 l \pi t \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right) + \\ + 4m_2 l \pi^2 t^4 \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3 \right) + (m_1 + m_2) g.$$

Полагая здесь  $t = 1$  с, найдем искомую реакцию  $N_1$ . Ответ:  $N_1 = 68,9$  Н.

### Задача Д6

Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса  $R$  или прямоугольная со сторонами  $R$  и  $2R$ , где  $R = 1,2$  м) массой  $m_1 = 24$  кг вращается с угловой скоростью  $\omega_0 = 10$  с<sup>-1</sup> вокруг вертикальной оси  $z$ , отстоящей от центра масс  $C$  платформы на расстоянии  $OC = b$  (рис. Д6.0—Д6.9, табл. Д6); размеры для всех прямоугольных платформ показаны на рис. Д6.0, а (вид сверху).

В момент времени  $t_0 = 0$  по желобу платформы начинает двигатьсяся (под действием внутренних сил) груз  $D$  массой  $m_2 = 8$  кг по закону  $s = AD = F(t)$ , где  $s$  выражено в метрах,  $t$  — в секундах. Одновременно на платформы, изображенные на рис. 0—4, начинает действовать пара сил с моментом  $M$  (задан в ньютона-метрах; при  $M < 0$  его направление противоположно показанному на рисунках); для платформ, изображенных на рис. 5—9,  $M = 0$ .

Определить: для платформ, изображенных на рис. 0—4, зависимость  $\omega = f(t)$ , т. е. угловую скорость платформы, как функцию времени; для платформ, изображенных на рис. 5—9, — угловую скорость  $\omega_1$  платформы в момент времени  $t_1 = 1$  с.

Форма желоба на рис. 0—4 прямолинейная (желоб  $KE$ ), на рис. 5, 6, 7 — окружность радиуса  $R$  (обод платформы), на рис. 8, 9 — окружность радиуса  $r = 0,5 R$ . На всех рисунках груз  $D$  по-

казан в положении, при котором  $s > 0$  (когда  $s < 0$ , груз находится по другую сторону от точки  $A$ ); на рис. 5—9 расстояние  $s = \overline{AD}$  отсчитывается по дуге окружности. Изображая чертеж решаемой задачи, провести ось  $z$  на заданном расстоянии  $OC = b$  от центра  $C$ .

**Указания.** Задача Д6 — на применение теоремы об изменении кинетического момента системы. При применении теоремы к системе, состоящей из платформы и груза, кинетический момент  $K_z$  системы относительно оси  $z$  определяется как сумма моментов платформы и груза. При этом следует учесть, что абсолютная скорость  $v$  груза складывается геометрически из относительной  $\bar{v}_{\text{от}}$  и переносной  $\bar{v}_{\text{пер}}$  скоростей, т.е.  $\bar{v} = \bar{v}_{\text{от}} + \bar{v}_{\text{пер}}$ . Поэтому и количество движения этого груза  $m\bar{v} = m\bar{v}_{\text{от}} + m\bar{v}_{\text{пер}}$ . Тогда можно воспользоваться теоремой Вариньона (статика), согласно которой  $m_z(m\bar{v}) = m_z(m\bar{v}_{\text{от}}) + m_z(m\bar{v}_{\text{пер}})$ ; эти моменты вычисляются так же, как моменты сил. Подробнее ход решения для случая, когда надо найти  $\omega = f(t)$ , разъяснен в примере Д6.

В случае, когда  $M = 0$  и надо определить  $\omega_1$ , воспользоваться законом сохранения кинетического момента (показав, что он здесь имеет место). При этом следует сначала найти и показать на чертеже положения  $D_0$  и  $D_1$  груза в моменты времени  $t_0 = 0$  и  $t_1 = 1$  с (найти, чему равен угол  $\angle ACD$  при  $t_0 = 0$  и  $t_1 = 1$  с), а также определить, чему равна и как направлена скорость  $\bar{v}_{\text{от}}$  в эти моменты времени. После этого, так же как в примере Д6, надо вычислить  $K_z$ , но не для произвольного момента времени, а сначала для момента  $t_0 = 0$  (когда груз в положении  $D_0$  и  $\omega = \omega_0$ ), а затем для момента  $t_1 = 1$  с (когда груз в положении  $D_1$  и  $\omega = \omega_1$ ) и использовать закон сохранения  $K_z$ .

Момент инерции прямоугольной пластины с массой  $m$  и сторонами  $a_1$  и  $a_2$  относительно оси  $Cz$ , перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр масс  $C$ , равен  $\frac{m}{12}(a_1^2 + a_2^2)$ .

При решении задачи полезно изобразить на вспомогательном чертеже вид на платформу сверху (с конца оси  $z$ ), как это сделано в качестве примеров для рис. Д6.0 и Д6.1 (рис. Д6.0,  $a$  и Д6.1,  $a$ ).

Таблица Д6

Номер условия	$b$	рис. 0—4		Рис. 5—7		Рис. 8—9	
		$s = F(t)$	$M$	$\bar{s} = F(t)$	$\bar{s} = F(t)$	$\bar{s} = F(t)$	
1	2	3	4	5	6		
0	$R$	$0,6 \cos(2t)$	8	$\frac{\pi R}{6}(t^2 - 1)$	$\frac{\pi r}{3}(4t^2 - 1)$		
1	$R/2$	$0,8t^2$	$2+4t$	$\frac{\pi R}{3}(4t^2 - 1)$	$\frac{\pi r}{6}(2-5t^2)$		

Номер условия	$b$	Рис. 0—4		Рис. 5—7		Рис. 8,9	
		$s=F(t)$	$M$	$\dot{s}=F(t)$	$\ddot{s}=F(t)$	$\ddot{s}=F(t)$	
1	2	3	4	5	6		
2	$R$	$0,4(1-t^3)$	$8t^2-2$	$\frac{\pi R}{6}(4-t^2)$	$\frac{\pi r}{6}(7t^2-4)$		
3	$R/2$	$-0,8 \cos(2t)$	$-12$	$\frac{\pi R}{3}(t^2+2)$	$\frac{\pi r}{4}(1+t^2)$		
4	$R$	$0,4t^3$	$-6t^2$	$\frac{\pi R}{6}(5t^2-2)$	$\frac{\pi r}{6}(4-t^2)$		
5	$R/2$	$-0,6t^2$	$12t$	$\frac{\pi R}{3}(1-t^2)$	$\frac{\pi r}{6}(4-7t^2)$		
6	$R$	$0,4 \cos(3t)$	$10$	$\frac{\pi R}{6}(t^2+2)$	$\frac{\pi r}{3}(5t^2-2)$		
7	$R/2$	$0,6(2-t^2)$	$6t$	$\frac{\pi R}{6}(1-4t^2)$	$\frac{\pi r}{4}(3t^2-1)$		
8	$R/2$	$-0,5 \cos(3t)$	$12$	$\frac{\pi R}{6}(7t^2-4)$	$\frac{\pi r}{6}(2+t^2)$		
9	$R$	$0,8(t^3+1)$	$-9t^2$	$\frac{2\pi R}{3}(t^2-1)$	$\frac{\pi r}{3}(1-t^2)$		

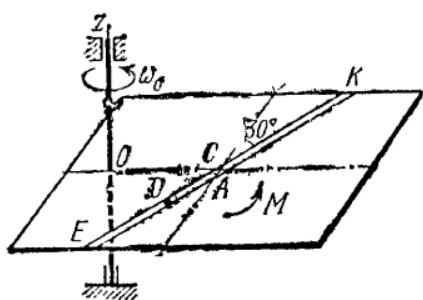


Рис. Д6.0

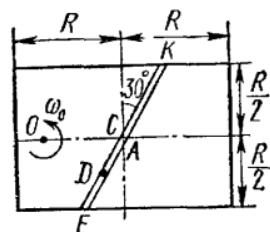


Рис. Д6.0а

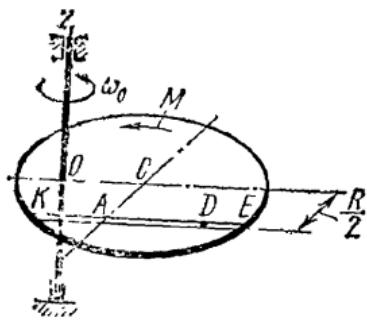


Рис. Д6.1

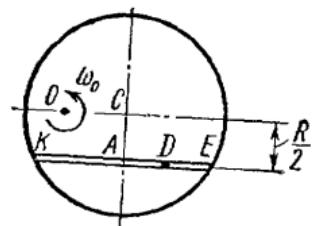


Рис. Д6.1а

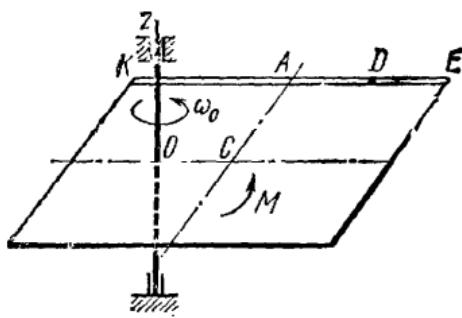


Рис. Д6.2

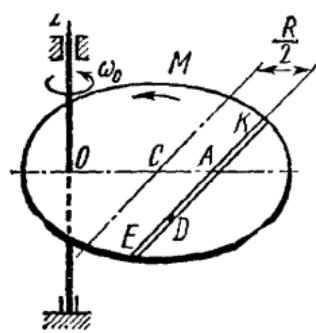


Рис. Д6.3

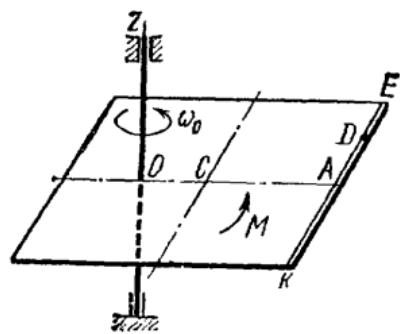


Рис. Д6.4

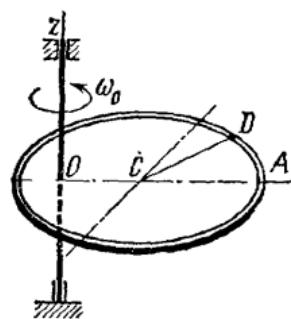


Рис. Д6.5

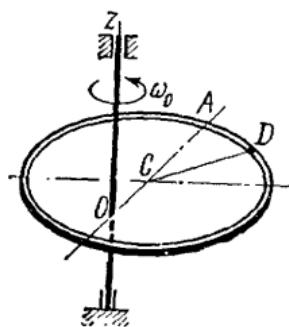


Рис. Д6.6

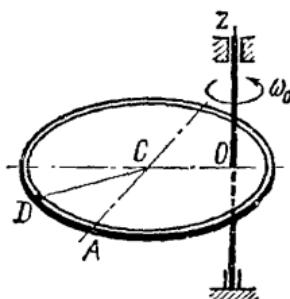


Рис. Д6.7

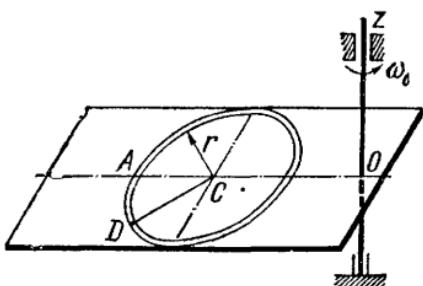


Рис. Д6.8

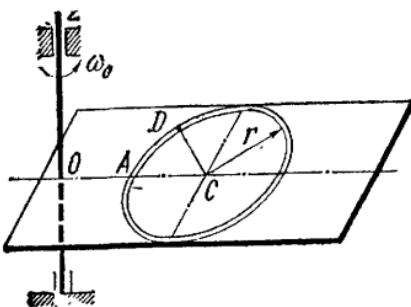


Рис. Д6.9

**Пример Д6.** Горизонтальная трубка  $AB$  массой  $m_1$  (рис. Д6, а) с помощью стержня  $OC$  жестко скреплена с вертикальным валом  $EH$ , который вращается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega_0$  (на рис. Д6, б показан вид сверху). В середине  $C$  трубы находится шар  $D$  массой  $m_2$ . В момент времени  $t_0 = 0$  на вал начинает действовать вращающий момент  $M$  (момент относительно оси  $z$ ) и одновременно шар начинает двигаться вдоль трубы по закону  $CD = s = f_1(t)$ .

Дано:  $m_1 = 15$  кг,  $m_2 = 10$  кг,  $AC = CB = CO = l = 1$  м,  $\omega_0 = 2$  с $^{-1}$ ,  $s = 0,4 t^2$  (с —

в метрах;  $t$  — в секундах),  $M = kt$ , где  $k = 6$  Н·м/с. Определить:  $\omega = f(t)$  — закон изменения угловой скорости трубы, пренебрегая массой стержня  $OC$  и вала.

**Решение.** Рассмотрим механическую систему, состоящую из трубы  $AB$  и шара  $D$ . Для определения  $\omega$  применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси  $z$ :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e). \quad (1)$$

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ , реакции  $\bar{R}_E$ ,  $\bar{R}_H$  и вращающий момент  $M$ . Так как силы  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$  параллельны оси  $z$ , а реакции  $\bar{R}_E$  и  $\bar{R}_H$  эту ось пересекают, то их моменты относительно оси  $z$  равны нулю. Тогда, считая для момента положительным направление  $\omega_0$  (т. с. против хода часовой стрелки), получим  $\sum m_z (\bar{F}_k^e) = -M = -kt$  и уравнение (1) примет такой вид:

$$\frac{dK_z}{dt} = -kt. \quad (2)$$

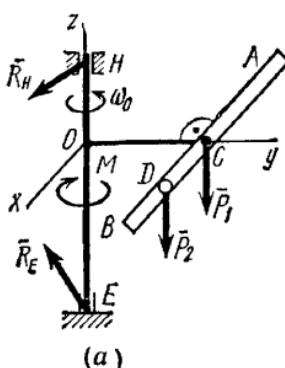
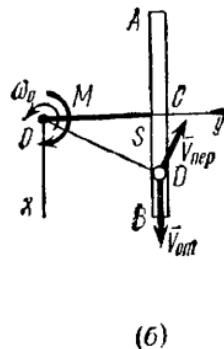


Рис. Д6



Умножая обе части этого уравнения на  $dt$  и интегрируя, получим

$$K_z = -\frac{k}{2} t^2 + C_1. \quad (3)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{\text{TP}} + K_z^D, \quad (4)$$

где  $K_z^{\text{TP}}$  и  $K_z^D$  — кинетические моменты трубки и шара  $D$  соответственно.

Так как трубка вращается вокруг оси  $z$ , то  $K_z^{\text{TP}} = I_z \omega$ . Значение  $I_z$  найдем по теореме Гюйгенса:  $I_z = I_{Cz'} + m_1 (OC)^2 = I_{Cz'} + m_1 l^2$  ( $I_{Cz'}$  — момент инерции относительно оси  $z'$ , параллельной оси  $z$  и проходящей через центр масс  $C$  трубки). Рассматривая трубку как однородный стержень длиной  $AB = 2l$ , получим

$$I_{Cz'} = \frac{m_1 (2l)^2}{12} = \frac{m_1 l^2}{3} \text{ и } I_z = \frac{m_1 l^2}{3} + m_1 l^2 = \frac{4}{3} m_1 l^2.$$

Следовательно,

$$K_z^{\text{TP}} = \frac{4}{3} m_1 l^2 \omega. \quad (5)$$

Для определения  $K_z^D$  обратимся к рис. Д6, б и рассмотрим движение шара  $D$  как сложное, считая его движение по трубке относительным, а вращение самой трубки вокруг оси  $z$  — переносным движением. Тогда абсолютная скорость шара  $\bar{v} = v_{\text{от}} + v_{\text{пер}}$ . Поскольку шар  $D$  движется по закону  $s = CD = 0,4 t^2$ , то  $v_{\text{от}} = s = 0,8 t$ ; изображаем вектор  $v_{\text{от}}$  на рис. Д6, б с учетом знака  $s$  (при  $s < 0$  направление  $v_{\text{от}}$  было бы противоположным). Затем, учитывая направление  $\omega$ , изображаем вектор  $v_{\text{пер}}$  ( $v_{\text{пер}} \perp OD$ ); численно  $v_{\text{пер}} = \omega \cdot OD$ . Тогда, по теореме Вариньона,

$$\begin{aligned} K_z^D &= m_2 (\bar{v}) = m_2 (m_2 \bar{v}_{\text{от}}) + m_2 (m_2 \bar{v}_{\text{пер}}) = \\ &= -m_2 v_{\text{от}} \cdot OC + m_2 v_{\text{пер}} \cdot OD = -m_2 \cdot 0,8t l + m_2 \omega (OD)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Но из рис. Д6, б видно, что  $OD^2 = l^2 + s^2 = l^2 + 0,16 t^4$ . Подставляя эту величину в равенство (6), а затем значения  $K_z^D$  и  $K_z^{\text{TP}}$  из (6) и (5) в равенство (4), получим с учетом данных задачи

$$\begin{aligned} K_z &= \frac{4}{3} m_1 l^2 \omega + m_2 \omega (l^2 + 0,16 t^4) - m_2 \cdot 0,8t l = \\ &= (30 + 1,6t^4) \omega - 8t l. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда уравнение (3), где  $k = 6$ , примет вид

$$(30 + 1,6t^4) \omega - 8t l = -3t^2 + C_1. \quad (8)$$

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям: при  $t = 0$ ,  $\omega = \omega_0$ . Получим  $C_1 = 30 \omega_0 = 60$ . При этом значении  $C_1$  из уравнения (8) находим искомую зависимость  $\omega$  от  $t$ . Ответ:  $\omega = (60 + 8t - 3t^2) / (30 + 1,6t^4)$  с<sup>-1</sup> (где  $t$  — в секундах).

## Задача Д7

Барабан радиуса  $R$  весом  $P$  имеет выточку (как у катушки) радиуса  $r = 0,6 R$  (рис. Д7.0—Д7.9, табл. Д7). К концам намотанных на барабан нитей приложены постоянные силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , направления которых определяются углом  $\beta$ ; кроме сил на барабан действует пара с моментом  $M$ . При движении, начинаящемся из состояния покоя, барабан катится без скольжения по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  так, как показано на рисунках.

Пренебрегая сопротивлением качению, определить закон движения центра масс  $C$  барабана, т. с.  $x_C = f(t)$ , и наименьшее значение коэффициента трения  $f$  о плоскость, при котором возможно качение без скольжения. Барабан рассматривать как сплошной однородный цилиндр радиуса  $R$ .

**Указания.** Задача Д7 — на применение дифференциальных уравнений плоско-параллельного движения твердого тела. При составлении уравнений следует во избежание ошибок в знаках направить координатную ось  $x$  в ту сторону, куда предполагается направленным движение центра  $C$  барабана, и считать тогда все моменты положительными, когда они направлены в сторону вращения барабана. Если фактически направление движения центра  $C$  другое, то в ответе получится  $a_C < 0$ , но найденная величина  $|a_C|$  будет верной. Силу трения, когда неясно, куда она направлена, можно направлять в любую сторону (результат от этого не зависит).

Определяя наименьшее значение коэффициента трения, при котором возможно качение без скольжения, учесть, что сила трения не может быть больше предельной, т. е. что  $|F_{tr}| \leq fN$ , откуда  $f \geq |F_{tr}|/N$ . Следовательно,  $f_{min} = |F_{tr}|/N$ . Очень существенно, что во все эти выражения входят модули сил (мы не пишем  $|N|$ , так как в данной задаче не может быть  $N < 0$ ). Если при расчетах получится  $F_{tr} < 0$ , то это означает лишь, что фактически сила  $\bar{F}_{tr}$  направлена в другую сторону; в остальном весь расчет будет верным.

Таблица Д7

Номер условия	$\alpha$	$\beta$	$F_1$	$F_2$	$M$
	град				
0	30	60	0	0,4P	0
1	30	30	0,2P	0	0
2	0	30	0	0,2P	0,1PR
3	30	—	0	0	0,4PR
4	30	90	0,1P	0	0,2PR
5	0	60	0,3P	0,1P	0
6	30	0	0	0,3P	0,2PR
7	0	60	0,2P	0	0,3PR
8	30	90	0	0,2P	0,4PR
9	30	60	0,1P	0,1P	0,3PR

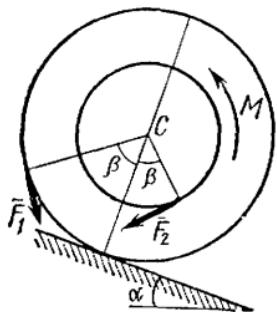


Рис. Д7.0

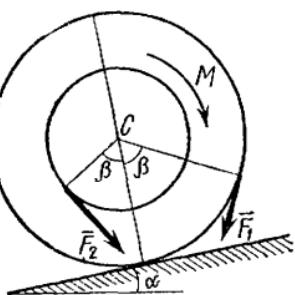


Рис. Д7.1

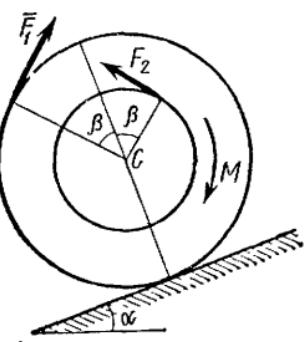


Рис. Д7.2

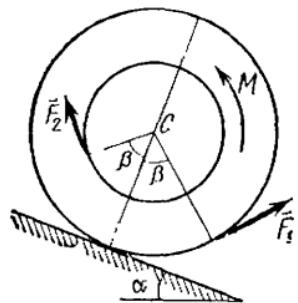


Рис. Д7.3

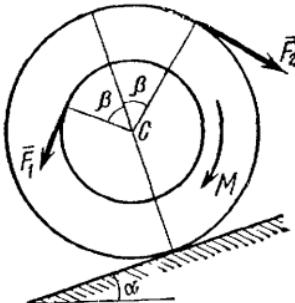


Рис. Д7.4

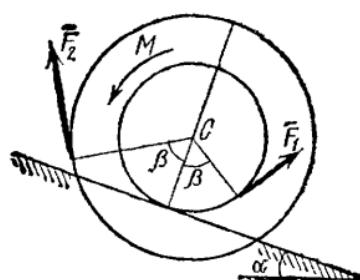


Рис. Д7.5

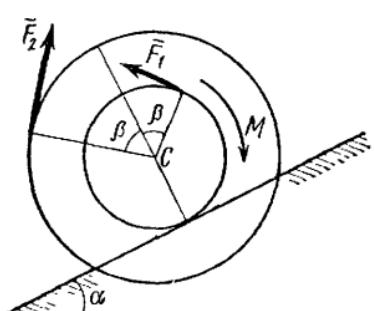


Рис. Д7.6

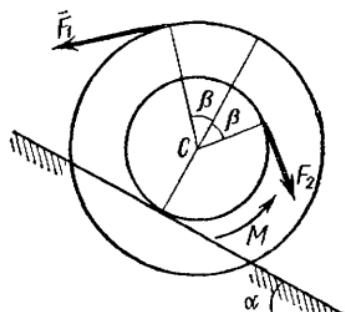


Рис. Д7.7

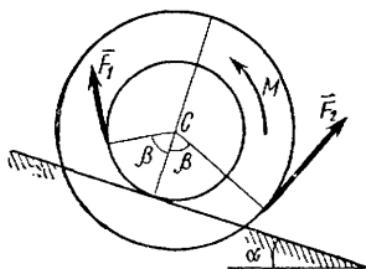


Рис. Д7.8

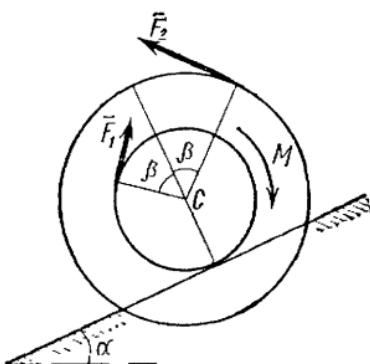


Рис. Д7.9

**Пример Д7.** Барабан (сплошной однородный цилиндр) радиуса  $R$  и весом  $P$  начинает катиться без скольжения из состояния покоя по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ ; на барабан действуют сила  $\bar{F}$  и пара сил с моментом  $M$  (рис. Д7).

Дано:  $P, F = 0,8 P, M = 1,1 PR, \alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ$ .

Определить: 1)  $x_C = f(t)$  — закон движения центра масс барабана; 2)  $f_{\min}$  — наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение без скольжения.

**Решение.** Барабан совершает плоскопараллельное движение под действием сил:  $\bar{P}, \bar{F}, \bar{N}, \bar{F}_{tp}$  и момента  $M$ . Так как направление силы трения  $\bar{F}_{tp}$  заранее неизвестно, выбираем его произвольно. Проводим оси  $Oxy$  и составляем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения:

$$\ddot{m}x_C = \Sigma F_{kx}; \quad \ddot{m}x_C = F \cos \beta + P \sin \alpha + F_{tp}; \quad (1)$$

$$\ddot{m}y_C = \Sigma F_{ky}; \quad \ddot{m}y_C = N - P \cos \alpha - F \sin \beta; \quad (2)$$

$$I_{Cz} \ddot{\epsilon} = \Sigma m_{Cz} (\bar{F}_k); \quad \frac{mR^2}{2} \ddot{\epsilon} = FR - F_{tp} R - M. \quad (3)$$

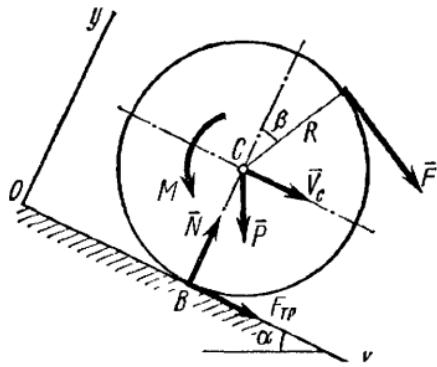


Рис. Д7

За положительное направление для моментов принято направление по ходу часовой стрелки, т. е. в ту сторону, куда будет вращаться барабан при движении центра  $C$  от оси  $Oy$ .

1) Определение  $x_C = f(t)$ . Поскольку ясно, что в нашей задаче  $y_C = R = \text{const}$  и  $\dot{y}_C = 0$ , то уравнения (1)–(3) содержат четыре неизвестные величины ( $\ddot{x}_C, \ddot{\epsilon}, N$  и  $F_{tp}$ ). Поэтому необходимо найти еще одно соотношение, связывающее эти величины. Для этого учтем, что  $\ddot{x}_C = a_C$  (так как центр  $C$  движется прямолинейно) и что

при качении без скольжения в точке  $B$  находится мгновенный центр скоростей. Тогда

$$v_C = \omega R, \quad a_C = \dot{v}_C = \ddot{\omega}R = \epsilon R \text{ или} \\ \ddot{x}_C = \epsilon R. \quad (4)$$

Теперь из уравнения (3) можно исключить  $\epsilon$ , подставив в (3) найденное значение  $\epsilon R$ ; для одновременно обе части уравнения (3) на  $R$ , получим

$$\frac{1}{2} m \ddot{x}_C = F - F_{\text{тр}} - \frac{M}{R}. \quad (5)$$

Далее, сложив почленно равенства (1) и (5), исключим из них  $F_{\text{тр}}$  и получим

$$\frac{3}{2} m \ddot{x}_C = F(1 + \cos \beta) + P \sin \alpha - \frac{M}{R} = \\ = 0,8P(1 + \cos 30^\circ) + P \sin 30^\circ - 1,1P = 0,89P.$$

Отсюда, так как  $P = mg$ , найдем для определения  $x_C = f(t)$  следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_C = 0,6g. \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (6), получим

$$\dot{x}_C = 0,6gt + C_1; \quad x_C = 0,3gt^2 + C_1t + C_2. \quad (7)$$

По начальным условиям при  $t = 0$   $v_C = \dot{x}_C = 0$  и  $x_C = 0$  (ось  $y$  проводим через начальное положение точки  $C$ ). Подстановка этих величин в равенства (7) дает  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ . Окончательно находим следующий закон движения центра  $C$ :

$$x_C = 0,3gt^2. \quad (8)$$

2) Определение  $f_{\text{тр}}$ . Для определения  $f$  исходим из того, что при качении без скольжения сила трения должна удовлетворять неравенству

$$|F_{\text{тр}}| \leq fN, \quad (9)$$

куда, подчеркиваем, входят модули сил. Величину  $N$  находим из уравнения (2), учитывая, что  $\dot{y}_C = 0$ . Получим

$$N = P \cos \alpha + F \sin \beta = P \cos 30^\circ + 0,8P \sin 30^\circ = 1,27P. \quad (10)$$

Значение  $F_{\text{тр}}$  проще всего найти из уравнения (5), заменив в нем  $x_C$  его значением (6). Получим

$$0,3mg = F - F_{\text{тр}} - \frac{M}{R}.$$

Отсюда, так как  $mg = P$ ,

$$F_{\text{тр}} = F - \frac{M}{R} - 0,3P = 0,8P - 1,1P - 0,3P = -0,6P. \quad (11)$$

Знак указывает, что сила  $\bar{F}_{tr}$  направлена противоположно показанному на рисунке.

Подставляя значения  $F_{tr}$  и  $N$  из равенств (11) и (10) в неравенство (9), получим  $0,6 P \leq 1,27 Pf$ , откуда  $f \geq 0,47$ . Следовательно, наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение барабана без скольжения,  $f_{min} = 0,47$ .

### Задача Д8

Вертикальный вал  $AK$  (рис. Д8.0—Д8.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$ , закреплен подшипником в точке  $A$  и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д8 в столбце 2 ( $AB = BD = DE = EK = 0,4 \text{ м}$ ). К валу прикреплен жестко или с помощью шарнира тонкий однородный ломаный стержень массой  $m = 10 \text{ кг}$ , состоящий из частей 1 и 2 (на рис. 0—5) или 1, 2 и 3 (на рис. 6—9). Размеры частей стержня показаны на рисунках, где  $b = 0,1 \text{ м}$ , а массы этих частей пропорциональны их длиам.

Определить величины, указанные в таблице в столбце 9, где обозначено:  $R_B$ ,  $R_E$  и т. д. — реакция соответствующего подшипника или шарнира,  $N$  — реакция невесомого стержня. Весом вала пренебречь.

Способ крепления стержня к валу и точка, где он прикреплен, указаны в таблице в столбцах 3 и 4. Когда крепление к валу шарнирное, ломаный стержень удерживается в положении, определяемом углом  $\alpha$ , невесомым стержнем 3 (на рис. 0—5) или 4 (на рис. 6—9), образующим с валом угол  $\phi$ ; при жестком креплении этот невесомый стержень отсутствует (на чертеже не изображать).

На рис. Д8.10 в качестве примера показан вид чертежа в случае, когда подшипник находится в точке  $D$ , а ломаный стержень прикреплен к валу в точке  $E$  жестко (приварен); невесомый стержень отсутствует.

**Указания.** Задача Д8 — на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую  $\bar{R}^n$ , то численно  $R^n = mas$ , где  $as$  — ускорение центра масс  $C$  тела, но линия действия силы  $\bar{R}^n$  в общем случае не проходит через точку  $C$  (см. пример Д8).

Таблица Д8

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление стержня		$\alpha$ , град	$\beta$ , град	$\gamma$ , град	$\phi$ , град	Найти
		жестко в точке	шарнир в точке		рис. 0—4	рис. 5—9		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$B$	$D$	—	45	135	225	—	$R_A$ , $R_B$
1	$B$	$E$	—	60	240	150	—	$R_A$ , $R_B$
2	$K$	—	$E$	30	210	120	60	$R_E$ , $N$

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление стержня		$\alpha$ , град	$\beta$ , град	$\gamma$ , град	$\psi$ , град	Найти
		жестко в точке	шарнир в точке		рис. 0—4	рис. 5—9		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	$D$	$K$	—	60	150	240	—	$R_A, R_D$
4	$K$	—	$D$	30	120	210	60	$R_D, N$
5	$E$	$B$	—	45	225	135	—	$R_A, R_E$
6	$K$	—	$D$	60	60	150	120	$R_D, N$
7	$K$	$B$	—	30	30	120	—	$R_A, R_K$
8	$K$	—	$E$	60	150	60	120	$R_E, N$
9	$E$	$K$	—	30	120	210	—	$R_A, R_E$

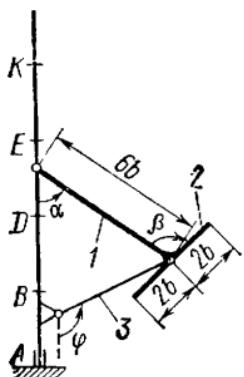


Рис. Д8.0

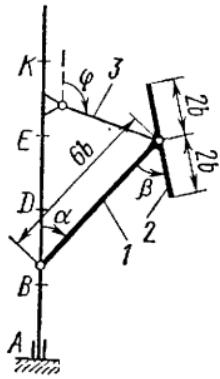


Рис. Д8.1

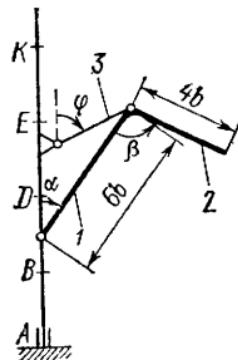


Рис. Д8.2

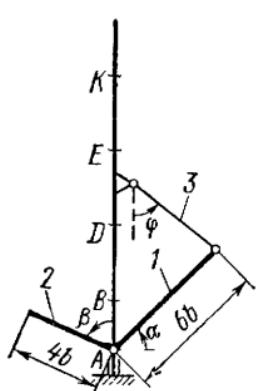


Рис. Д8.3

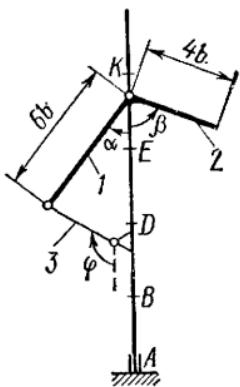


Рис. Д8.4

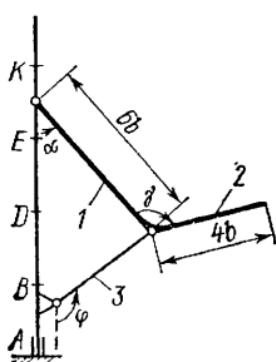


Рис. Д8.5

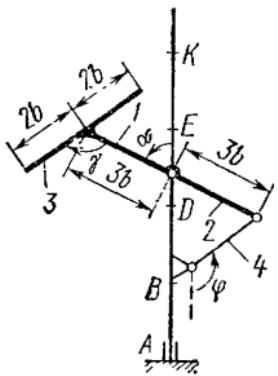


Рис. Д8.6

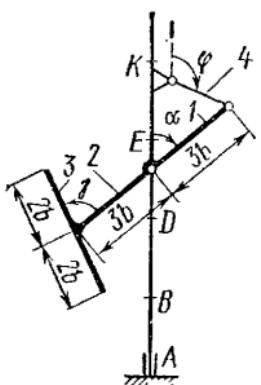


Рис. Д8.7

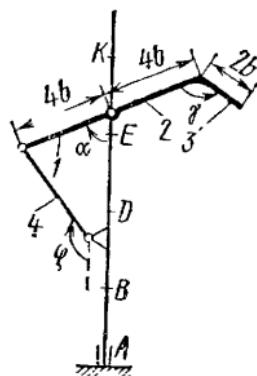


Рис. Д8.8

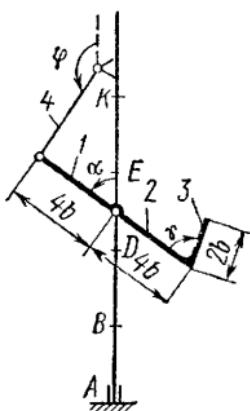


Рис. Д8.9

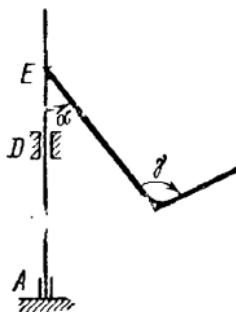


Рис. Д8.10

**Пример Д8.** Вертикальный вал, закрепленный под пятником  $A$  и подшипником  $E$  (рис. Д8, а), вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Ломаный однородный стержень массой  $m$  и длиной  $10b$ , состоящий из частей 1, 2, 3, прикреплен к валу шарниром  $B$  и невесомым стержнем 4.

Дано:  $m = 10 \text{ кг}$ ,  $\omega = 8 \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 150^\circ$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $b = 0,2 \text{ м}$ . Определить: реакции шарнира  $B$  и стержня 4.

**Решение.** 1. Изображаем вал и прикрепленный к нему ломаный стержень в соответствии с заданными углами (рис. Д8, б). Массы и веса частей 1, 2 и 3 этого стержня, так как они пропорциональны длинам частей, а длина всего стержня равна  $10b$  (рис. Д8, а), соответственно равны:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,6m, \quad m_2 = 0,3m, \quad m_3 = 0,1m; \\ P_1 &= 0,6mg, \quad P_2 = 0,3mg, \quad P_3 = 0,1mg. \end{aligned} \quad (1)$$

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение ломаного стержня и применим принцип Даламбера. Проведем врашающиеся вместе с валом координатные оси  $Bxy$  так, чтобы стер-

жень лежал в плоскости  $xy$ , и изобразим действующие на него внешние силы: силы тяжести  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ , составляющие  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Y}_B$  реакции шарнира  $B$  и реакцию  $\bar{N}$  стержня 4.

Присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня. Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения  $a_{nh}$ , направленные к оси вращения, а численно  $a_{nh} = \omega^2 h_k$ , где  $h_k$  — расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции  $\bar{F}_k^u$  будут направлены от оси вращения, а численно  $F_k^u = \Delta m a_{nh} = \Delta m \omega^2 h_k$ , где  $\Delta m$  — масса элемента.

Поскольку все  $\bar{F}_k^u$  оказались пропорциональными  $h_k$ , то энзоры этих параллельных сил образуют для частей 1 и 2 треугольники, а для части 3 — прямоугольник (рис. Д8, б).

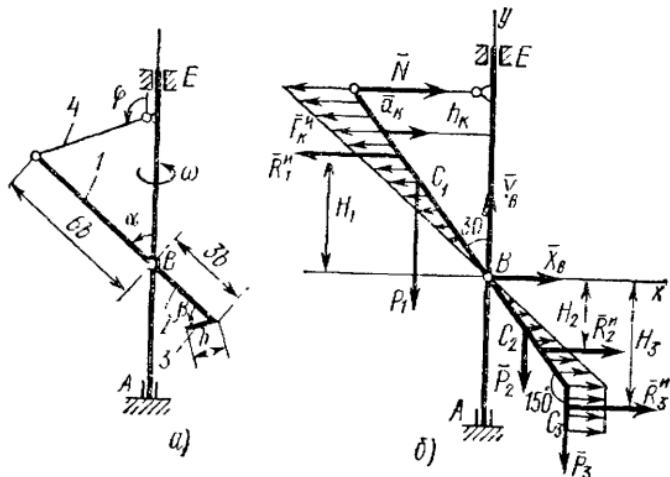


Рис. Д8

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение  $R^u = ma_c$ , где  $m$  — масса тела,  $a_c$  — ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим

$$R_1^u = m_1 a_{C1}, \quad R_2^u = m_2 a_{C2}, \\ R_3^u = m_3 a_{C3}. \quad (2)$$

Но центры масс частей стержня, как и его элементы, имеют только нормальные ускорения, равные

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1}, \quad a_{C2} = \omega^2 h_{C2}, \quad a_{C3} = \omega^2 h_{C3},$$

где  $h_{C1} = 3b \sin 30^\circ$ ,  $h_{C2} = 1.5b \sin 30^\circ$ ,  $h_{C3} = 3b \sin 30^\circ$  — расстояния центров масс частей от оси вращения. В результате из равенств (2) и (1), учитывая, что  $b=0,2$  м, получим:

$$\begin{aligned}
 R_1^u &= 0,6m\omega^2 \cdot 3b \sin 30^\circ = 115,2 \text{ Н;} \\
 R_2^u &= 0,3m\omega^2 \cdot 1,5b \sin 30^\circ = 28,8 \text{ Н;} \\
 R_3^u &= 0,1m\omega^2 \cdot 3b \sin 30^\circ = 19,2 \text{ Н.}
 \end{aligned} \tag{3}$$

При этом линии действия равнодействующих  $\bar{R}_1^u$  и  $\bar{R}_2^u$  пройдут через центры тяжестей соответствующих треугольников, т. е. на расстояниях  $H_1$  и  $H_2$  от оси  $x$ , а равнодействующая  $\bar{R}_3^u$  приложена в середине части 3 и проходит на расстоянии  $H_3$  от оси  $x$ , где

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{2}{3} \cdot 6b \cos 30^\circ = 0,69 \text{ м;} \\
 H_2 &= \frac{2}{3} \cdot 3b \cos 30^\circ = 0,35 \text{ м;} \\
 H_3 &= 3b \cos 30^\circ + \frac{b}{2} = 0,62 \text{ м.}
 \end{aligned} \tag{4}$$

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составив для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_{kx} &= 0, X_B - R_1^u + R_2^u + R_3^u + N = 0; \\
 \Sigma F_{ky} &= 0, Y_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0; \\
 \Sigma m_B (\bar{F}_k) &= 0, P_1 \cdot 3b \sin 30^\circ + R_1^u \cdot H_1 - \\
 &- P_2 \cdot 1,5b \sin 30^\circ + R_2^u \cdot H_2 - P_3 \cdot 3b \sin 30^\circ + \\
 &+ R_3^u \cdot H_3 - N \cdot 6b \cos 30^\circ = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Подставив сюда значения соответствующих величин из равенств (1), (3), (4) и решив затем эту систему уравнений, найдем искомые реакции. Ответ:  $X_B = -40,4$  Н;  $Y_B = 98,1$  Н;  $N = 107,6$  Н.

**Примечание.** Если по условиям задачи ломаный стержень в точке  $B$  жестко скреплен с валом (невесомый стержень 4 отсутствует) и требуется определить реакции подпятника  $A$  и подшипника  $E$ , то для решения надо рассмотреть движение механической системы, состоящей из ломаного стержня и вала и тоже применить принцип Даламбера. При этом действующими внешними силами будут все силы тяжести и реакции подпятника  $A$  и подшипника  $E$ . Силы инерции вычисляют так же, как в рассмотренном примере. Затем составляют три уравнения равновесия и из них определяют искомые реакции.

### Задача Д9

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии; положение равновесия определяется углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $0$  (рис. Д9.0—Д9.9, табл. Д9а и Д9б). Длины стержней механизма (кривошипов) рав-

ны:  $l_1 = 0,4$  м,  $l_4 = 0,6$  м (размеры  $l_2$  и  $l_3$  произвольны); точка  $E$  находится в середине соответствующего стержня.

На ползун  $B$  механизма действует сила упругости пружины  $\bar{F}$ ; численно  $F = c\lambda$ , где  $c$  — коэффициент жесткости пружины,  $\lambda$  — ее деформация. Кроме того, на рис. 0 и 1 на ползун  $D$  действует сила  $\bar{Q}$ , а на кривошип  $O_1A$  — пара сил с моментом  $M$ ; на рис. 2—9 на кривошипы  $O_1A$  и  $O_2D$  действуют пары сил с моментами  $M_1$  и  $M_2$ .

Определить, чему равна при равновесии деформация  $\lambda$  пружины, и указатель, растянута пружина или сжата. Значения всех заданных величин приведены в табл. Д9а для рис. 0—4 и в табл. Д9б для рис. 5—9, где  $Q$  выражено в ньютонах, а  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  — в ньютона-метрах.

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом  $\alpha$ ; для большей наглядности ползун с направляющими и пружину изобразить так, как в примере Д9 (см. рис. Д9, а также рис. Д9.10, б). Если на чертеже решаемого варианта задачи прикрепленный к ползуну  $B$  стержень окажется совмещенным с пружиной (как на рис. Д9.10, а), то пружину следует считать прикрепленной к ползуну с другой стороны (как на рис. Д9.10, б, где одновременно иначе изображены направляющие).

**Указания.** Задача Д9 — на определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений. Механизм в рассматриваемой задаче имеет одну степень свободы, т. е. одно независимое возможное перемещение. Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар на этом перемещении и приравнять ее нулю. Все вошедшие в составленное уравнение возможные перемещения следует выразить через какое-нибудь одно.

Чтобы найти  $\lambda$ , надо из полученного условия равновесия определить силу упругости  $F$ . На чертеже эту силу можно направить в любую сторону (т. е. считать пружину или растянутой, или сжатой); верно ли выбрано направление силы, укажет знак.

Таблица Д9а (к рис. Д9.0—Д9.4)

Номер условия	Углы, град					$c$ , Н/см	Для рис. 0—1		Для рис. 2—4	
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varphi$	$\theta$		$M$	$Q$	$M_1$	$M_2$
0	90	120	90	90	60	180	100	400	120	160
1	60	150	30	90	30	160	120	380	140	440
2	30	120	120	0	60	150	140	360	160	420
3	0	60	90	0	120	140	160	340	180	400
4	30	120	30	0	60	130	180	320	200	380
5	0	150	30	0	60	120	200	300	220	360
6	0	150	90	0	120	110	220	280	240	340
7	90	120	120	90	150	100	240	260	260	320
8	60	60	60	90	30	90	260	240	280	300
9	120	30	30	90	150	80	280	220	300	280

Таблица Д9б (к рис. Д9.5—Д9.9)

Номер условия	Углы, град					$c$ , Н/см	$M_1$	$M_2$
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varphi$	$\theta$			
0	30	30	60	0	150	80	200	340
1	0	60	60	0	120	90	220	320
2	60	150	120	90	30	100	240	300
3	30	60	30	0	120	110	260	280
4	90	120	150	90	30	120	280	260
5	30	120	150	0	60	130	300	240
6	60	150	150	90	30	140	320	220
7	0	60	30	0	120	150	340	200
8	90	120	120	90	60	160	360	180
9	90	150	120	90	30	180	380	160

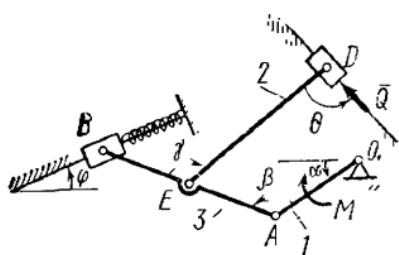


Рис. Д9.0

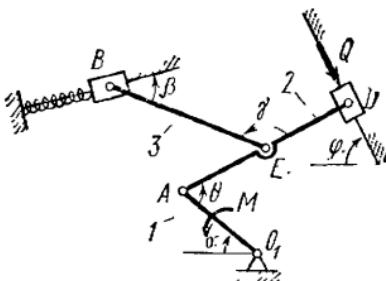


Рис. Д9.1

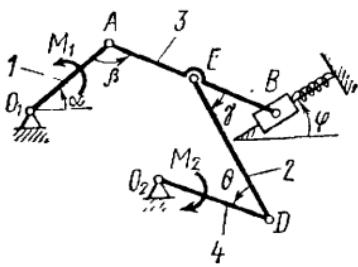


Рис. Д9.2

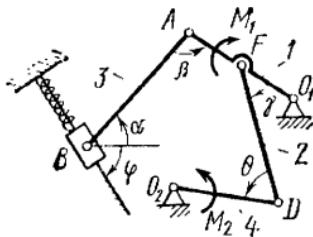


Рис. Д9.3

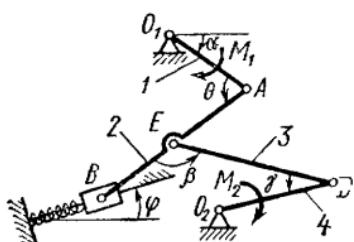


Рис. Д9.4

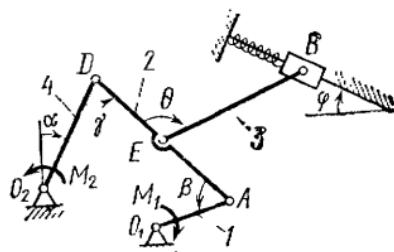


Рис. Д9.5

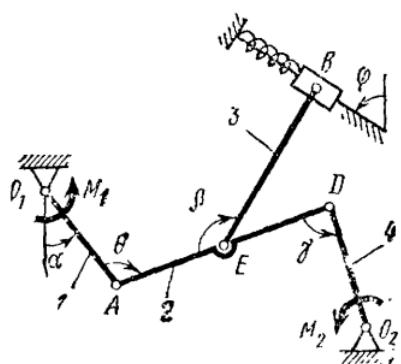


Рис. Д9.6

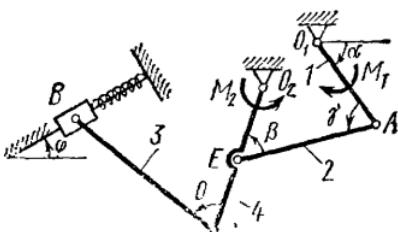


Рис. Д9.7

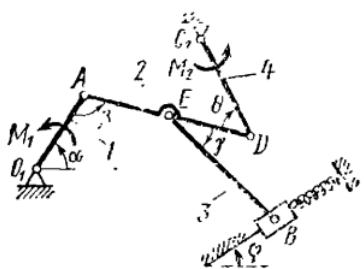


Рис. Д9.8

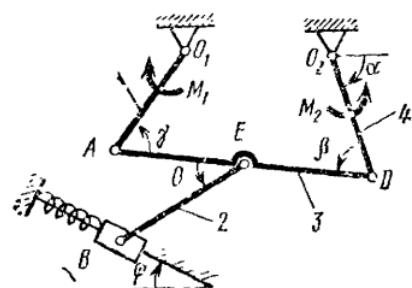


Рис. Д9.9

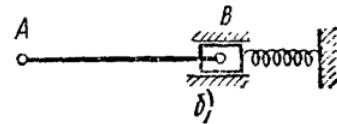
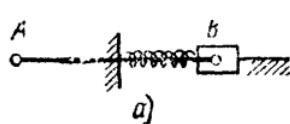


Рис. Д9.10 а, б

**Пример Д9.** Механизм (рис. Д9.а), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней 1, 2, 3 и ползунов *B*, *D*, соединенных друг с другом и с неподвижной опорой *O<sub>1</sub>* шарнира-

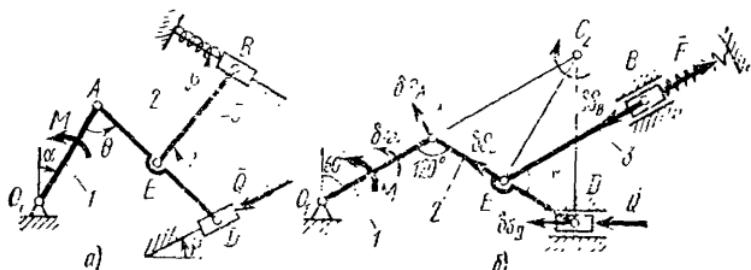


Рис. Д9 а, б

ми. К ползуну  $B$  прикреплена пружина с коэффициентом жесткости  $c$ , к ползуну  $D$  приложена сила  $\bar{Q}$ , а к стержню  $I$  (кривошипу) — пара сил с моментом  $M$ .

Дано:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\theta = 120^\circ$ ,  $l = 0,4$  м,  $AE = ED$ ,  $c = 125$  Н/см,  $M = 150$  Н·м,  $Q = 350$  Н. Определить: деформацию  $\lambda$  пружины при равновесии механизма.

**Решение.** 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. Д9, б); при этом согласно последнему из указаний к задаче Д9 прикрепляем пружину к ползуну с другой стороны (так, как если бы было  $\beta = 180^\circ$ ).

Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\sum \delta A_k = 0, \quad (1)$$

где  $\delta A_k$  — элементарные работы активных сил на соответствующих возможных перемещениях.

Изображаем действующие на механизм активные силы: силу  $\bar{Q}$ , силу упругости  $\bar{F}$  пружины (предполагая, что пружина растянута) и пару с моментом  $M$ .

Неизвестную силу  $F$  найдем с помощью уравнения (1), а зная  $F$  и учитывая, что  $F = c\lambda$ , определим  $\lambda$ .

2. Чтобы составить уравнение (1), сообщим механизму возможное перемещение и введем следующие обозначения для перемещений звеньев, к которым приложены активные силы:  $\delta\varphi_1$  — поворот стержня  $I$  вокруг оси  $O_1$ ,  $\delta s_D$  и  $\delta s_B$  — перемещения ползунов (точек)  $D$  и  $B$ .

Из перемещений  $\delta\varphi_1$ ,  $\delta s_D$ ,  $\delta s_B$  независимое от других — одно (у механизма одна степень свободы). Примем за независимое возможное перемещение  $\delta\varphi_1$  и установим, какими тогда будут  $\delta s_D$  и  $\delta s_B$ , выразив их через  $\delta\varphi_1$ ; при этом важно верно определить и направления  $\delta s_D$ ,  $\delta s_B$ , так как иначе в уравнении (1) будут ошибки в знаках.

При расчетах учтем, что зависимость между возможными перемещениями здесь такая же, как между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении и воспользуемся известными из кинематики соотношениями (ход расчетов такой же, как в примере К3).

Сначала найдем и изобразим  $\delta s_A$  (направление  $\delta s_A$  определяется направлением  $\delta\varphi_1$ ); получим

$$\delta s_A = l_1 \delta\varphi_1; \quad \delta s_A \perp O_1 A. \quad (2)$$

Теперь определим и изобразим  $\delta s_D$ , учитывая, что проекции  $\delta s_D$  и  $\delta s_A$  на прямую  $AD$  должны быть равны друг другу (иметь одинаковые модули и знаки). Тогда

$$\delta s_D \cos 30^\circ = \delta s_A \cos 30^\circ \text{ и } \delta s_D = \delta s_A = l_1 \delta\varphi_1. \quad (3)$$

Чтобы определить  $\delta s_B$ , найдем сначала  $\delta s_E$ . Для этого построим мгновенный центр вращения (скоростей)  $C_2$  стержня 2 (на пересечении перпендикуляров к  $\delta s_A$  и  $\delta s_D$ , восстановленных из точек  $A$  и  $D$ ) и покажем направление поворота стержня 2 вокруг  $C_2$ , учитя направление  $\delta s_A$  или  $\delta s_D$ . Так как  $\angle C_2AD = \angle C_2DA = 60^\circ$ , то  $\triangle AC_2D$  равносторонний и  $C_2E$  в нем высота, поскольку  $AE = ED$ . Тогда перемещение  $\delta s_E$ , перпендикулярное  $C_2E$ , будет направлено

по прямой  $EA$  (при изображении  $\delta s_E$  учитываем направление поворота вокруг центра  $C_2$ ).

Воспользовавшись опять тем, что проекции  $\delta s_E$  и  $\delta s_A$  на прямую  $EA$  должны быть равны друг другу, получим (значение  $\delta s_E$  можно найти и составив соответствующую пропорцию)

$$\delta s_E = \delta s_A \cos 30^\circ = l_1 \delta\varphi_1 \cos 30^\circ. \quad (4)$$

Наконец, из условия равенства проекций  $\delta s_B$  и  $\delta s_E$  на прямую  $BE$  находим и изображаем  $\delta s_B$ . Численно

$$\delta s_B = \delta s_E \cos 60^\circ = l_1 \delta\varphi_1 \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = 0,43l_1 \delta\varphi_1. \quad (5)$$

3. Теперь составляем для механизма уравнение (1); получим

$$M\delta\varphi_1 + Q\delta s_D - F\delta s_B = 0, \quad (6)$$

или, заменяя здесь  $\delta s_D$  и  $\delta s_B$  их значениями (3) и (5) и вынося одновременно  $\delta\varphi_1$  за скобки,

$$(M + l_1 Q - 0,43l_1 F) \delta\varphi_1 = 0. \quad (7)$$

Так как  $\delta\varphi_1 \neq 0$ , то отсюда следует, что

$$M + l_1 Q - 0,43l_1 F = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (8) находим значение  $F$  и определяем  $\lambda = F/c$ . Ответ:  $\lambda = 13,5$  см. Знак указывает, что пружина, как и предполагалось, растянута.

### Задача Д10

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов 1 и 2, обмоганных нитями, грузов 3—6, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. Д10.0—Д10.9, табл. Д10). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом  $M$ , приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива 1 равны:  $R_1 = 0,2$  м,  $r_1 = 0,1$  м, а шкива 2 —  $R_2 = 0,3$  м,  $r_2 = 0,15$  м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно  $\rho_1 = 0,1$  м и  $\rho_2 = 0,2$  м.

Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес; веса  $P_1, \dots, P_6$  шкивов и грузов заданы в таблице в пьютонах. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже не изображать (шкивы 1, 2 изображать всегда как части системы).

**Указания.** Задача Д10 — на применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера — Лагранжа). Ход решения задачи такой же, как в задаче Д9, только предварительно надо присоединить к действующим на систему силам соответствующие силы инерции. Учесть при этом, что для однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (шкива), система сил инерции приводится к паре с моментом  $M^e = I_z \epsilon$ , где  $I_z$  — момент инерции тела относительно оси вращения,  $\epsilon$  — угловое ускорение тела; направление  $M^e$  противоположно направлению  $\epsilon$ .

Таблица Д10

Номер условия	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$M, \text{ Н}\cdot\text{м}$
0	10	0	20	30	40	0	0,9
1	0	40	0	10	20	30	1,2
2	20	30	40	0	10	0	0,6
3	0	20	10	30	0	40	1,8
4	30	0	20	0	40	10	1,2
5	0	10	30	40	20	0	0,9
6	40	0	0	20	30	10	1,8
7	10	20	0	40	0	30	0,6
8	0	40	10	0	30	20	0,9
9	30	0	40	20	10	0	1,2

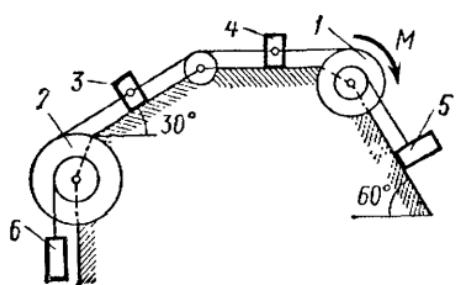


Рис. Д10.0

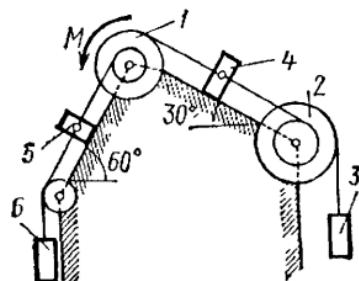


Рис. Д10.1

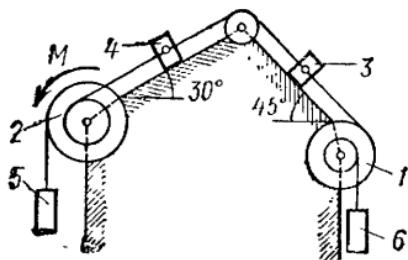


Рис. Д10.2

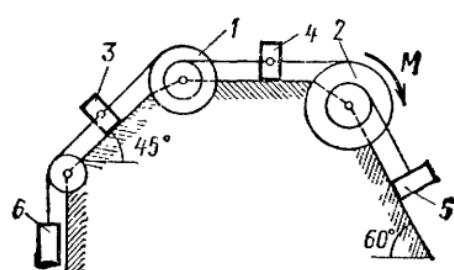


Рис. Д10.3

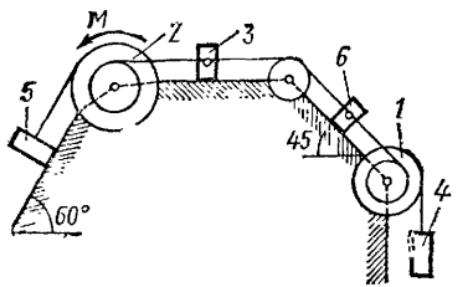


Рис. Д10.4

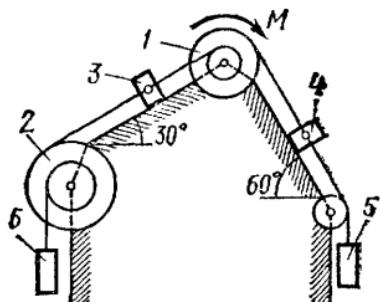


Рис. Д10.5

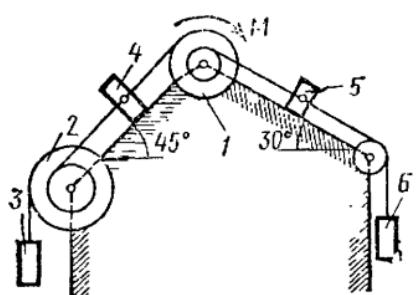


Рис. Д10.6

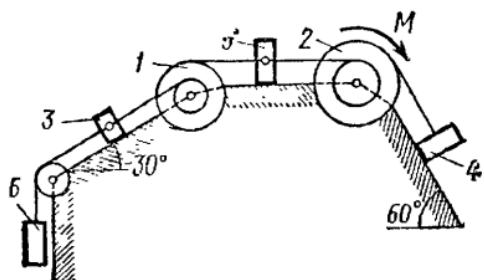


Рис. Д10.7

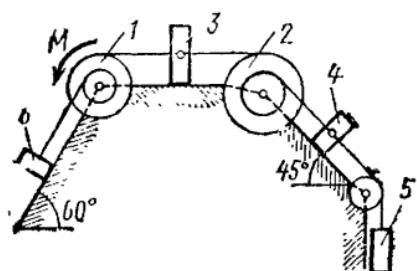


Рис. Д10.8

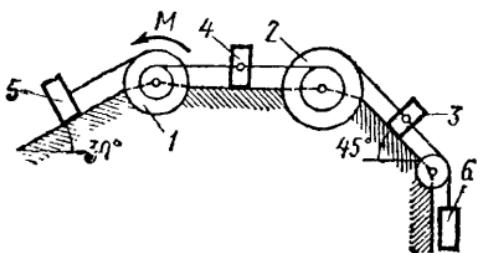


Рис. Д10.9

**Пример Д10.** Механическая система (рис. Д10) состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса  $R_1$  и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней  $R_2$  и  $r_2$ , радиус инерции относительно оси вращения  $r_2$ ), а также из грузов 3 и 4, прикрепленных к этим нитям. Система

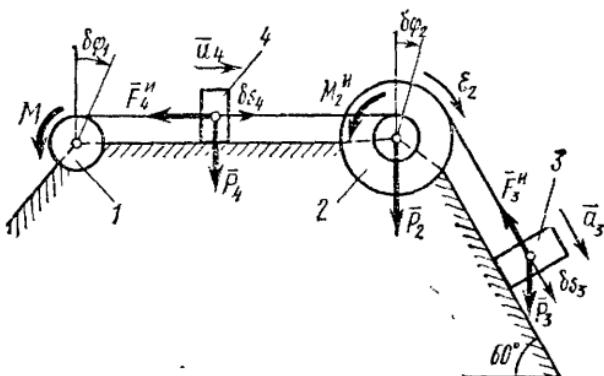


Рис. Д10

движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом  $M$ , приложенной к блоку 1.

Дано:  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 30$  Н,  $P_3 = 40$  Н,  $P_4 = 20$  Н,  $M = 16$  Н·м,  $R_1 = 0,2$  м,  $R_2 = 0,3$  м,  $r_2 = 0,15$  м,  $\rho_2 = 0,2$  м.

Определить: ускорение груза 3, пренебрегая трением.

**Решение.** 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4, соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, — идеальные.

Для определения  $a_3$  применим общее уравнение динамики:

$$\Sigma \delta A_k^a + \Sigma \delta A_k^H = 0, \quad (1)$$

где  $\Sigma \delta A_k^a$  — сумма элементарных работ активных сил;  $\Sigma \delta A_k^H$  — сумма элементарных работ сил инерции.

2. Изображаем на чертеже активные силы  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ ,  $\bar{P}_4$  и пару сил с моментом  $M$ . Задавшись направлением ускорения  $\vec{a}_3$ , изображаем на чертеже силы инерции  $\bar{F}_3^H$ ,  $\bar{F}_4^H$  и пару сил инерции с моментом  $M_2^H$ , величины которых равны:

$$\begin{aligned} F_3^H &= \frac{P_3}{g} a_3; \quad F_4^H = \frac{P_4}{g} a_4; \\ M_2^H &= \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим

$$(P_3 \sin 60^\circ - F_3^H) \delta s_3 - M_2^H \delta \varphi_2 - F_4^H \delta s_4 - M \delta \varphi_1 = 0. \quad (3)$$

Выразим все перемещение через  $\delta \varphi_2$ :

$$\delta s_3 = R_2 \delta \varphi_2; \quad \delta s_4 = r_2 \delta \varphi_2;$$

$$\delta \varphi_1 = \frac{r_2}{R_1} \delta \varphi_2. \quad (4)$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду

$$\left[ P_3 \left( \sin 60^\circ - \frac{a_3}{g} \right) R_2 - \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2 - \frac{P_4}{g} a_4 r_2 - M \frac{r_2}{R_1} \right] \delta \Phi_2 = 0. \quad (5)$$

Входящие сюда величины  $\varepsilon_2$  и  $a_4$  выразим через искомую величину  $a_3$ :

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}; \quad a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2} a_3.$$

Затем, учитя, что  $\delta \Phi_2 \neq 0$ , приравняем нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках.

Из полученного в результате уравнения найдем

$$a_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60^\circ - M (r_2/R_1)}{P_3 R_2 + P_2 \rho_2^2 / R_2 + P_4 (r_2^2/R_2)} g.$$

Вычисления дают следующий ответ:  $a_3 = -0,9$  м/с<sup>2</sup>. Знак указывает, что ускорение груза 3 и ускорение других тел направлены противоположно показанным на рис. Д10.

### Задача Д11

Механическая система состоит из тел 1, 2, ..., 5 весом  $P_1, P_2, \dots, P_5$  соответственно, связанных друг с другом петлями, намотанными на ступенчатые блоки 1 и 2 (рис. Д11.0—Д11.9, табл. Д11). Радиусы ступенчатых блоков 1 и 2 равны соответственно:  $R_1 = R, r_1 = 0,4R, R_2 = R, r_2 = 0,8R$ . При вычислении моментов инерции все блоки, катки и колеса считать однородными сплошными цилиндрами радиуса  $R$ .

На систему кроме сил тяжести действует сила  $\bar{F}$ , приложенная к телу 3 или 4 (если тело 3 в систему не входит, сила приложена в точке  $B$  к тележке), и пары сил с моментами  $M_1, M_2$ , приложенные к блокам 1 и 2; когда  $M < 0$ , направление момента противоположно показанному на рисунке.

На участке петли, указанном в таблице в столбце «Пружина», включена пружина с коэффициентом жесткости  $c$  (например, если в столбце стоит  $AB$ , то участок  $AB$  является пружиной, если  $AD$ , то  $AD$  — пружина и т. д.); в начальный момент времени пружина не деформирована.

Составить для системы уравнения Лагранжа и найти закон изменения обобщенной координаты  $x$ , т. е.  $x = f(t)$ , считая, что движение начинается из состояния покоя; определить также частоту и период колебаний, совершаемых телами системы при ее движении (о выборе координаты  $x$  см. Указания).

Прочерк в столбцах таблицы, где заданы веса, означает, что соответствующее тело в систему не входит (на чертеже не изображать), а поль — что тело считается невесомым, но в систему входит; для колес, обозначенных номером 4,  $P_4$  — их общий вес (вес платформы такой тележки не учитывается). На рис. 5 и 8 блок, к которому подвешен груз 5, невесомый.

**Указания.** Задача Д11 — на применение к изучению движения

системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет две степени свободы; следовательно, ее положение определяется двумя обобщенными координатами  $q_1$  и  $q_2$  и для нее должны быть составлены два уравнения.

Решение начать с выбора обобщенных координат, обозначив их  $q_1 = x$  и  $q_2 = \varphi$  или  $q_1 = x$  и  $q_2 = y$ . За координату  $x$  принять удлинение пружины, отсчитываемое в сторону того из тел 3, 4 или 5 системы, к которому пружина прикреплена; например, если пружина прикреплена к этому телу в точке  $B$  и ее длина в произвольный момент времени равна  $AB$ , то  $x = AB - l_0$ , где  $l_0$  — длина недеформированной пружины. За координату  $\varphi$  принять угол поворота крайнего блока (этот блок может быть и невесомым), отсчитывая  $\varphi$  от начального положения. Если в систему ни один блок не входит, а входят лишь тела 3 и 4, за координату  $y$  принять расстояние тела 4 от начального положения. Соответствующие примеры даны на рис. Д11.10, *a*, *b*, *v*.

Дальнейший ход решения разъяснен в примере Д11.

Таблица Д11

Номер условия	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$F$	$M_1$	$M_2$	Пружина
0	$4P$	0	—	$3P$	—	$4P$	0	0	$AB$
1	0	$2P$	—	—	$3P$	0	0	$-2PR$	$KE$
2	0	$2P$	—	$P$	—	0	$2PR$	0	$AB$
3	—	0	$2P$	$5P$	—	0	0	$2PR$	$BD$
4	$P$	—	—	—	$4P$	0	$-PR$	0	$KE$
5	—	—	$4P$	$3P$	—	$P$	0	0	$BD$
6	$2P$	0	—	—	$P$	0	0	$-PR$	$KE$
7	—	$4P$	—	$2P$	—	$3P$	0	$2PR$	$AB$
8	—	$4P$	$2P$	0	—	0	0	$3PR$	$BD$
9	$2P$	0	—	$P$	—	0	$2PR$	0	$AB$

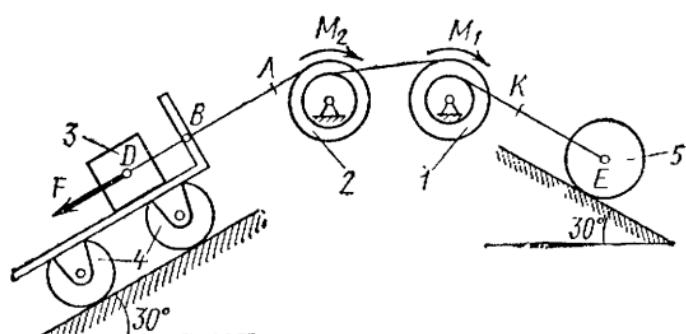


Рис. Д11.0

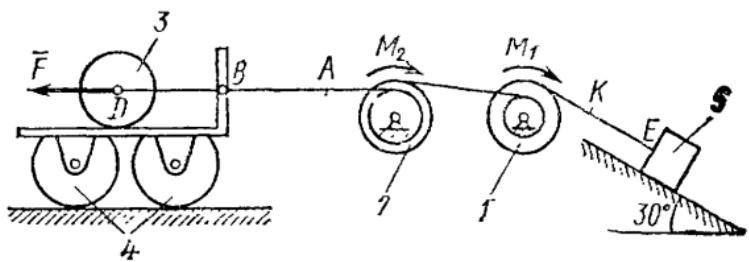


Рис. Д11.1

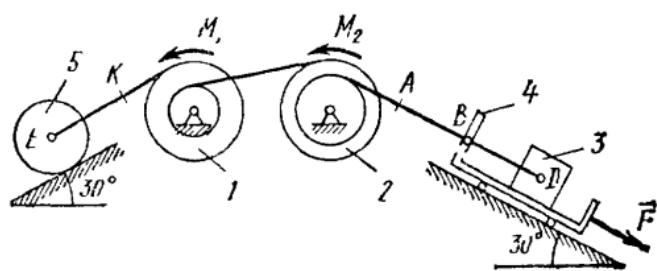


Рис. Д11.2

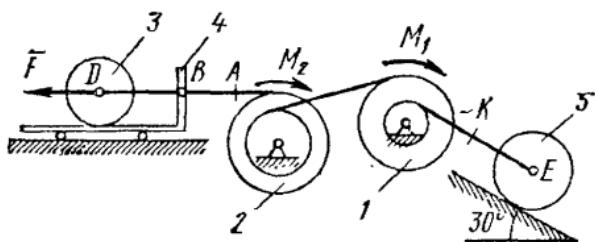


Рис. Д11.3

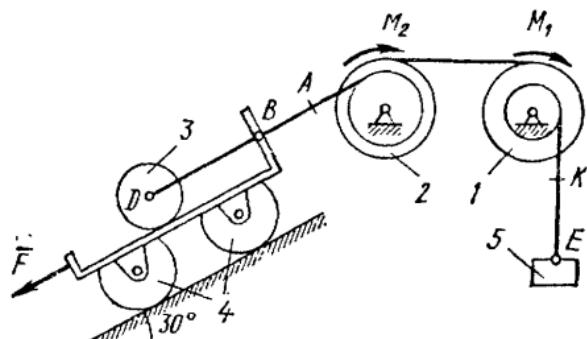


Рис. Д11.4

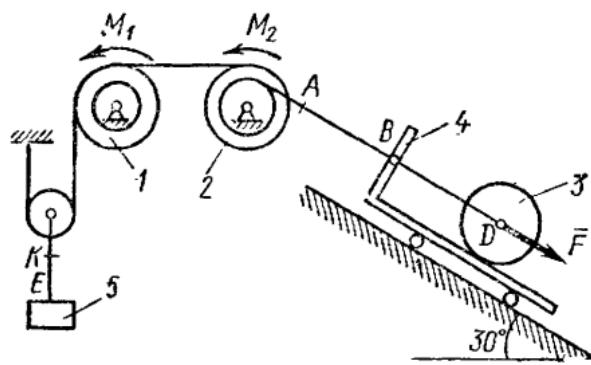


Рис. Д11.5

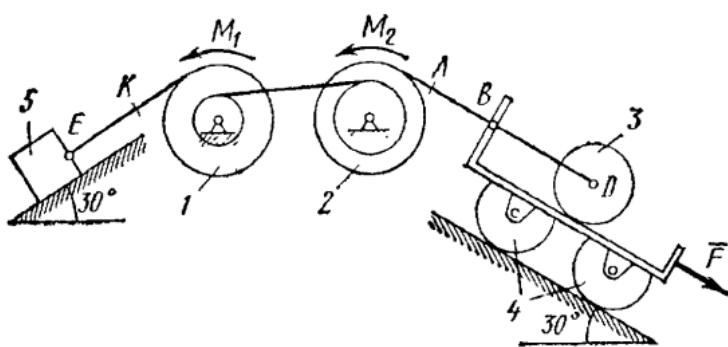


Рис. Д11.6

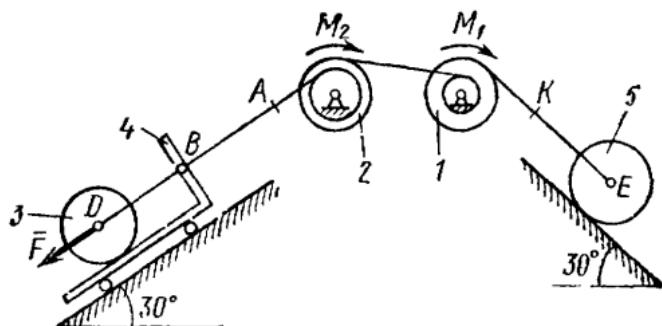


Рис. Д11.7

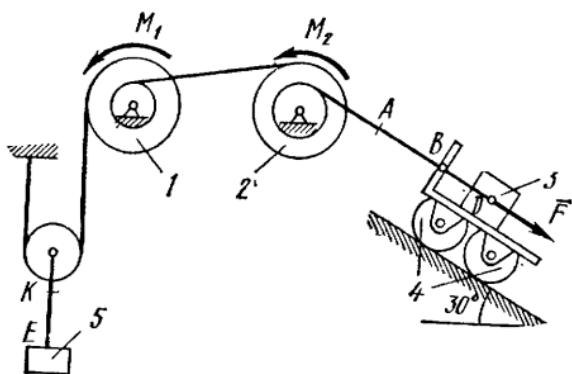


Рис. Д11.8

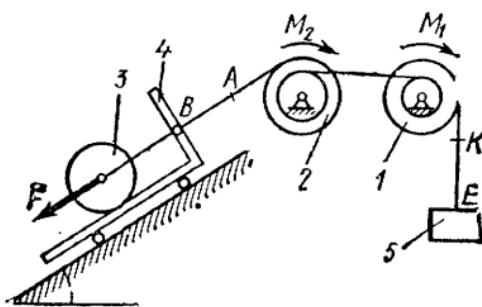


Рис. Д11.9

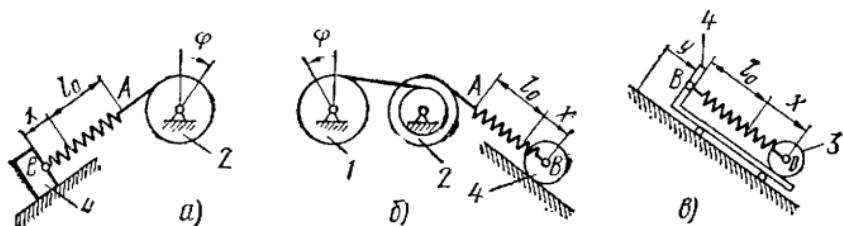


Рис. Д11.10 а, б, в

**Пример Д11.** Механическая система (рис. Д11) состоит из барабана 1 радиуса  $R$ , к которому приложена пара сил с моментом  $M$ , тележки 2 и катка 3 (барабан и каток однородные цилиндры); веса всех тел равны соответственно  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ; весом колес тележки

пренебрегаем. Тележка соединена с барабаном намотанной на него нитью, а с катком — пружиной  $BD$ , коэффициент жесткости которой равен  $c$ . Система начинает движение из состояния покоя; пружина в этот момент не деформирована.

Дано:  $R, c, P_1 = 2P; P_2 = 4P; P_3 = 2P; M = 4PR, \alpha = 30^\circ$ .

Определить: 1)  $x = f(t)$ , где  $x$  — удлинение пружины (или перемещение центра  $D$  катка по отношению к тележке); 2) частоту  $k$  и период  $\tau$  колебаний.

**Решение.** 1. Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота барабана  $\varphi$  и удлинение пружины  $x$  ( $q_1 = \varphi, q_2 = x$ ). Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_2. \quad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию  $T$  системы, равную сумму энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (2)$$

Так как барабан вращается вокруг оси  $O$ , тележка движется поступательно, а каток — плоскопараллельно, то

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_2^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \omega_3^2,$$

где  $I_O = (P_1/2g)R^2, I_D = (P_3/2g)R_3^2$  ( $R_3$  — радиус катка 3).

Все входящие сюда скорости надо выразить через обобщенные скорости  $\varphi$  и  $x$ . Очевидно, что  $\omega_1 = \dot{\varphi}, v_2 = R\dot{\varphi} = R\dot{x}$ . Для определения  $v_D$  рассмотрим движение катка как сложное. Учитывая, что  $x$  определяет положение точки  $D$  по отношению к тележке, получим  $v_D = \bar{v}_D^{\text{от}} + \bar{v}_D^{\text{пер}}$ , где численно  $\bar{v}_D^{\text{от}} = \dot{x}, \bar{v}_D^{\text{пер}} = v_2 = R\dot{\varphi}$ . Тогда, принимая во внимание, что при возрастании  $\varphi$  и  $x$  скорости  $\bar{v}_D^{\text{от}}$  и  $\bar{v}_D^{\text{пер}}$  направлены в разные стороны и что точка  $E$  для катка — мгновенный центр скоростей, получим

$$v_D = \dot{x} - R\dot{\varphi}, \quad \omega_3 = \frac{v_D}{ED} = \frac{\dot{x} - R\dot{\varphi}}{R_3}.$$

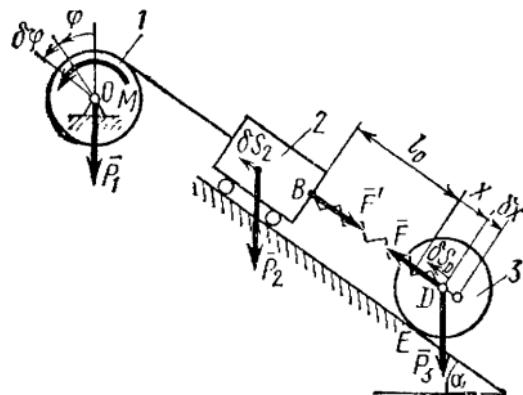


Рис. Д11

Подставляя все найденные значения скоростей и значения  $I_O$  и  $I_D$  в равенства (3) и учитывая, что  $P_1 = P_3 = 2P$ , а  $P_2 = 4P$ , получим окончательно из (1) следующее выражение для  $T$ :

$$T = \frac{P}{g} \left( 4R^2 \dot{\varphi}^2 - 3R \dot{\varphi} \dot{x} + \frac{3}{2} \dot{x}^2 \right). \quad (4)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{P}{g} (8R^2 \dot{\varphi} - 3R \dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \frac{P}{g} (-3R \dot{\varphi} + 3\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Теперь определим обобщенные силы  $Q_1$  и  $Q_2$ . Изображаем действующие на систему активные силы: силы тяжести  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ , силы упругости  $\bar{F}$  и  $\bar{F}'$ , где численно  $F' = F = cx$ , и пару с моментом  $M$ .

а) Для определения  $Q_1$  сообщим системе возможное перемещение, при котором координата  $\varphi$  получает приращение  $\delta\varphi > 0$ , а  $x$  не изменяется, т. е.  $\delta x = 0$  (пружина при таком перемещении системы не изменяет свою длину). Тогда тележка и центр  $D$  катка получают одинаковые перемещения  $\delta s_2 = \delta s_D = R\delta\varphi$  и элементарная работа действующих сил будет равна:

$$\delta A_1 = M\delta\varphi - P_2 \sin 30^\circ \cdot \delta s_2 - P_3 \sin 30^\circ \cdot \delta s_D - F' \delta s_2 + F \delta s_D.$$

Заменив здесь все величины их значениями, найдем в результате, что

$$\delta A_1 = (M - 0,5P_2 R - 0,5P_3 R) \delta\varphi = PR\delta\varphi. \quad (6)$$

б) Для определения  $Q_2$  сообщим системе возможное перемещение, при котором координата  $x$  получает приращение  $\delta x > 0$ , а  $\varphi$  не изменяется, т. е.  $\delta\varphi = 0$  (барабан не поворачивается и тележка не перемещается). Тогда элементарную работу совершают только силы  $\bar{P}_3$  и  $\bar{F}$ , учитя, что  $P_3 = 2P$ , получим

$$\delta A_2 = P_3 \sin 30^\circ \cdot \delta x - F \delta x = (P - cx) \delta x. \quad (7)$$

Коэффициенты при  $\delta\varphi$  и  $\delta x$  в равенствах (6) и (7) и будут исключены обобщенными силами; следовательно,

$$Q_1 = PR; \quad Q_2 = P - cx. \quad (8)$$

Подставляя величины (5) и (8) в уравнения (1), получим следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\frac{P}{g} (8R^2 \ddot{\varphi} - 3R \ddot{x}) = PR, \quad \frac{P}{g} (-3R \ddot{\varphi} + 3\ddot{x}) = P - cx. \quad (9)$$

4. Для определения  $x = f(t)$  исключим из уравнений (9)  $\ddot{\varphi}$ . Получим дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} + k^2 x = a, \quad (10)$$

$$\text{где } k^2 = \frac{8}{15} \frac{cg}{P}, \quad a = \frac{11}{15}g.$$

Общее решение уравнения (10), как известно из высшей математики, имеет вид:  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1$  — общее решение однородного уравнения  $\ddot{x} + k^2 x = 0$ , т. е.  $x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)$ , а  $x_2$  — частное решение уравнения (10). Будем искать решение  $x_2$  в виде  $x_2 = A = \text{const}$ . Подставляя значение  $x_2$  в уравнение (10), получим  $A = a/k^2$ . Таким образом, общее решение уравнения (10) имеет вид

$$x = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt) + a/k^2, \quad (11)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования. Для их определения найдем еще производную  $\dot{x}$  от  $x$  по времени:

$$\ddot{x} = C_1 k \cos(kt) - C_2 k \sin(kt). \quad (12)$$

По начальным условиям при  $t=0$   $x=0$ ,  $\dot{x}=0$  (движение начинается из состояния покоя и пружина в этот момент не деформирована). Подставляя эти величины в уравнения (11) и (12), найдем из них, что  $C_1=0$ ,  $C_2=-a/k^2$ .

Окончательно получим искомую зависимость  $x=f(t)$  в виде

$$x = \frac{a}{k^2} (1 - \cos kt), \quad (13)$$

где значения  $a$  и  $k^2$  даются последними двумя из равенств (10). Таким образом, центр  $D$  катка совершает по отношению к тележке колебания, закон которых дает равенство (13). Круговая частота  $k$  и период  $\tau$  этих колебаний:

$$k = \sqrt{\frac{8cg}{15P}}; \quad \tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{15P}{8cg}}. \quad (14)$$

**Примечание.** Когда система состоит из тел 3, 4 и имеет вид, показанный на рис. Д11.10, в, учесть при определении  $T$ , что в этом случае  $\omega_3$  равно не  $v_D/R_3$ , а  $v_D^{\text{от}}/R_3$ , т. е.  $\omega_3 = \dot{x}/R_3$ .

## Задача Д12

Механизм, расположенный в вертикальной плоскости (рис. Д12.0—Д12.9), состоит из ступенчатых колес 1 и 2 с радиусами  $R_1=0,4$  м,  $r_1=0,2$  м,  $R_2=0,5$  м,  $r_2=0,3$  м, имеющих неподвижные оси вращения; однородного стержня 3 длиной  $l=1,2$  м, закрепленного шарниром на одном из концов; грузов 4 и 5, подвешенных к нитям, намотанным на колеса. На стержне расстояние  $AB=2l/3$ .

Стержень 3 соединен с колесом 2 невесомым стержнем 6. Колеса 1 и 2 или находятся в зацеплении (рис. 0—4), или соединены невесомым стержнем 7 (рис. 5—9). К колесам и стержню 3 прикреплены пружины.

В табл. Д12 заданы массы  $m_i$  тел (в кг) и коэффициенты жесткости  $c_i$  пружин (в Н/м). Прочерки в столбцах таблицы означают, что соответствующие тела или пружины в систему не входят (на чертеже эти тела и пружины не изображать);  $m_1=0$  или  $m_2=0$  означает, что соответствующее колесо считается невесомым, но в состав механизма входит. Стержень 6 или 7 входит в состав механизма, когда в него входят оба тела, соединенные этим стержнем.

В положениях, изображенных на рисунках, механизм находится в равновесии. Определить частоту и период малых колебаний системы около положения равновесия. Найти также, чему равно статическое удлинение (сжатие) пружины  $\lambda_{\text{ст}}$  в положении равновесия.

При подсчетах считать колеса 1 и 2 сплошными однородными цилиндрами радиусов  $R_1$  и  $R_2$  соответственно.

Таблица Д12

Номер условия	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
0	16	12	—	4	—	1200	—	—
1	12	0	4	3	—	—	1000	—
2	10	8	—	—	2	600	—	—
3	0	10	6	—	5	—	—	1500
4	20	16	—	5	—	—	1500	—
5	16	0	8	—	3	—	—	1000
6	12	10	—	—	4	—	1200	—
7	20	—	5	2	—	—	—	600
8	0	12	—	5	2	1500	—	—
9	0	16	8	4	—	—	—	1200

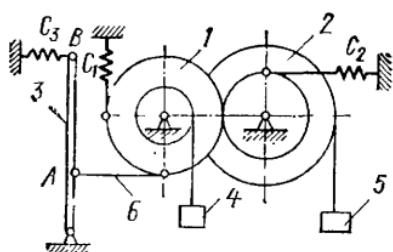


Рис. Д12.0

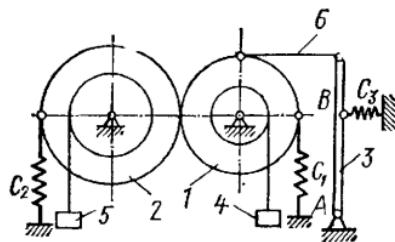


Рис. Д12.1

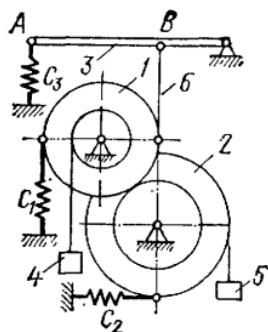


Рис. Д12.2

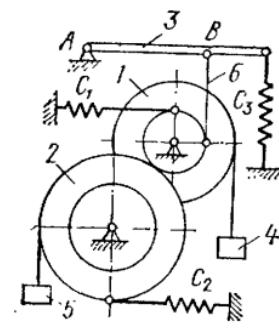


Рис. Д12.3

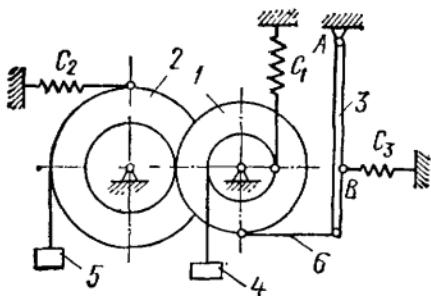


Рис. Д12.4

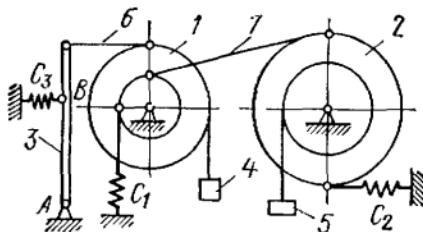


Рис. Д12.5

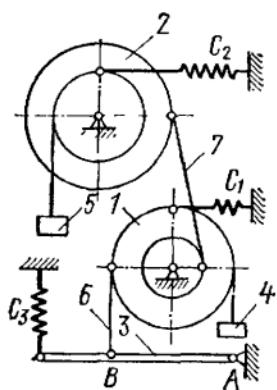


Рис. Д12.6

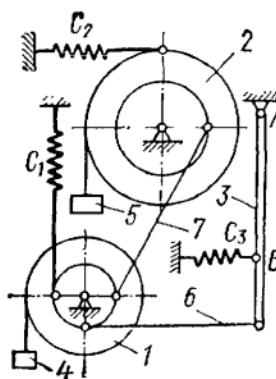


Рис. Д12.7

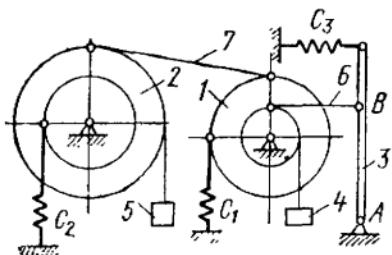


Рис. Д12.8

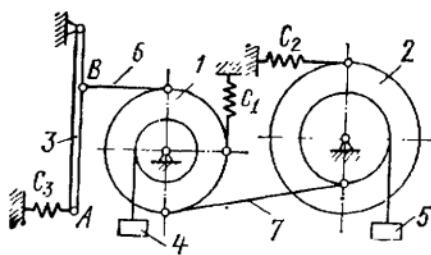


Рис. Д12.9

**Пример Д12.** Находящаяся в равновесии механическая система состоит из однородного стержня 1, ступенчатого колеса 2 с радиусами ступеней  $R_2$  и  $r_2$ , груза 3, подвешенного на нити, перекинутой через блок 4 и намотанной на колесо 2, и невесомого стержня 5, соединяющего тела 1 и 2 (рис. Д12, а). В точке  $O_1$  шарнир; в точ-

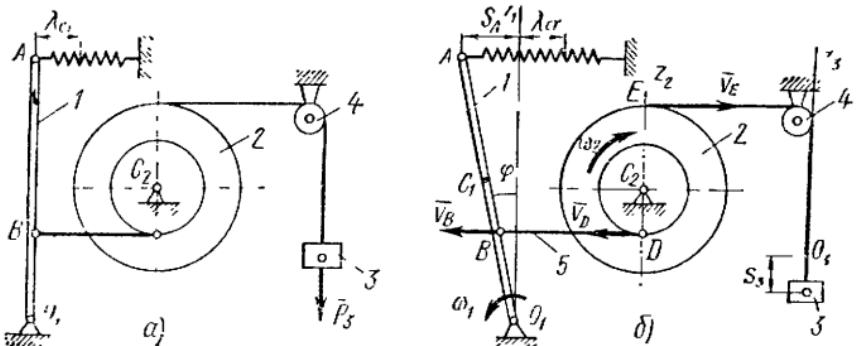


Рис. Д12

ке  $A$  прикреплена горизонтальная пружина с коэффициентом жесткости  $c$ .

**Дано:**  $m_1 = 10 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 12 \text{ кг}$ ,  $m_3 = 4 \text{ кг}$ ,  $m_4 = 0$ ,  $R_2 = R$ ,  $r_2 = 0,5R$ ,  $c = 750 \text{ Н/м}$ ,  $O_1A = l = 1 \text{ м}$ ,  $O_1B = l/3$ . Колесо 2 считать сплошным однородным цилиндром. Определить: частоту  $k$  и период  $\tau$  малых колебаний системы около положения равновесия и значение  $\lambda_{\text{ст}}$ .

**Решение.** 1. Рассмотрим произвольное положение системы, когда она выведена из состояния равновесия и совершает малые колебания (рис. Д12, б). Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты угол  $\varphi$  отклонения стержня от вертикали, считая  $\varphi$  малым, и составим для системы уравнение Лагранжа. Поскольку все действующие активные силы (сила упругости и силы тяжести) потенциальные, выразим обобщенную силу  $Q$  через потенциальную энергию  $\Pi$  системы. Тогда исходным уравнением будет

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q, \quad \text{где } Q = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \quad (1)$$

При исследовании малых колебаний в уравнении сохраняют малые величины  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  в первой степени, отбрасывая малые более высокого порядка. Для этого надо найти выражения  $T$  и  $\Pi$  с точностью до  $\varphi^2$  и  $\dot{\varphi}^2$ , так как в (1) входят первые производные от  $T$  и  $\Pi$  по  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ , а при дифференцировании многочлена его степень понижается на единицу.

2. Определим кинетическую энергию  $T$  системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (2)$$

Так как стержень 1 и колесо 2 врачаются вокруг осей  $O_1$  и  $C_2$  соответственно, а груз 3 движется поступательно, то

$$T_1 = I_{O_1} \omega_1^2 / 2; \quad T_2 = I_{C_2} \omega_2^2 / 2; \\ T_3 = m_3 v_3^2 / 2, \quad (3)$$

где

$$I_{O_1} = m_1 l^2 / 3; \quad I_{C_2} = m_2 R^2 / 2. \quad (4)$$

Все скорости, входящие в равенства (3), надо выразить через обобщенную скорость  $\varphi$ . Тогда  $\omega_1 = \dot{\varphi}$ . Затем ввиду малости  $\varphi$  можно считать  $v_D = v_B = \omega_1 \cdot l/3$ . Учитя это, найдем  $\omega_2 = v_D/l_2 = v_D/0,5R$  и  $v_S = v_E = \omega_2 R$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\varphi}; \quad \omega_2 = 2l\dot{\varphi}/3R; \\ v_3 &= 2l\dot{\varphi}/3.\end{aligned}\quad (5)$$

Подставляя величины (4) и (5) в равенства (3), получим из (2)

$$T = \frac{1}{2} a_0 \dot{\varphi}^2, \text{ где } a_0 = \left( \frac{m_1}{3} + \frac{2m_2}{9} + \frac{4m_3}{9} \right). \quad (6)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_0 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = a_0 \ddot{\varphi}. \quad (7)$$

3. Определим потенциальную энергию  $\Pi$  системы, учитывая, что для пружины  $\Pi = 0,5c\lambda^2$ , где  $\lambda$  — удлинение (сжатие) пружины, а для поля сил тяжести  $\Pi = mgz_c$ , где  $z_c$  — координата центра тяжести (ось  $z$  направлена по вертикали вверх). Тогда для всей системы

$$\Pi = 0,5c\lambda^2 + m_1 gz_{C1} + m_2 gz_{C2} + m_3 gz_{C3}, \quad (8)$$

где величины  $\lambda$ ,  $z_{C1}$ ,  $z_{C2}$ ,  $z_{C3}$  должны быть выражены через  $\varphi$ .

Определяя  $\lambda$ , учтем, что в положении равновесия пружина может иметь некоторое статическое (начальное) удлинение или сжатие  $\lambda_{ct}$ , необходимое для сохранения равновесия (в нашем случае для уравновешивания силы тяжести  $P_3$ ). В произвольном положении (см. рис. Д12, б) пружина получит дополнительное удлинение, равное  $s_A$ , причем ввиду малости  $\varphi$  можно считать  $s_A = l\varphi$ . Тогда  $\lambda = \lambda_{ct} + s_A = \lambda_{ct} + l\varphi$ .

Для  $z_{C1}$ , направляя ось  $z_1$  из точки  $O_1$  вверх, получим  $z_{C1} = -0,5l \cos \varphi$ . Разлагая здесь  $\cos \varphi$  в ряд и сохранив член с  $\varphi^2$ , получим

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \text{ и } z_{C1} = \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right).$$

Для  $z_{C2}$ , взяв начало координат в точке  $C_2$ , получим  $z_{C2} = 0$ .

Для  $z_{C3}$ , совмещая начало координат  $O_3$  с положением центра тяжести груза  $3$  при равновесии, получим  $z_{C3} = -s_3$ , где  $s_3$  — перемещение груза. Чтобы выразить  $s_3$  через  $\varphi$ , заметим, что зависимость между малыми перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями. Тогда по аналогии с последним из равенств (5)  $s_3 = 2l\varphi/3$  и  $z_{C3} = -2l\varphi/3$ .

Подставляя все найденные величины в равенство (8), получим

$$\Pi = \frac{c}{2} (\lambda_{ct} + l\varphi)^2 + \frac{1}{2} m_1 gl \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - \frac{2}{3} m_3 gl\varphi. \quad (9)$$

4. Определим обобщенную силу  $Q$  и  $\lambda_{ct}$ . Сначала находим

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = - \left[ cl (\lambda_{ct} + l\varphi) - \frac{1}{2} m_1 gl\varphi - \frac{2}{3} m_3 gl \right]. \quad (10)$$

Входящую сюда неизвестную величину  $\lambda_{ct}$  найдем из условия,

что при равновесии, т. е. тогда  $\varphi=0$ , должно быть и  $Q=0$ . Полагая в равенстве (10)  $\varphi=0$  и  $Q=0$ , получим  $cl\lambda_{ct}-2m_3gl/3=0$ , откуда

$$\lambda_{ct} = \frac{2}{3} \frac{m_3 g}{c}. \quad (11)$$

Заменяя в (10)  $\lambda_{ct}$  этим значением, найдем окончательно

$$Q = -b\varphi, \text{ где } b = (cl - 0,5m_1g)l. \quad (12)$$

5. Составляем уравнение Лагранжа. Подставив значения производных из равенств (7) и значение  $Q$  из (12) в уравнение (1), получим  $a_0\ddot{\varphi} = -b\dot{\varphi}$  или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \text{ где } k^2 = \frac{b}{a_0} = \frac{9(2cl - m_1g)}{2(3m_1 + 2m_2 + 4m_3)}. \quad (13)$$

Из теории колебаний известно, что когда уравнение приведено к виду (13), то в нем величина  $k$  является искомой круговой частотой, а период  $T = 2\pi/k$ . При заданных числовых значениях, произведя соответствующие расчеты, получим из (13) и (11) следующие отвѣты:  $k = 9,49 \text{ с}^{-1}$ ;  $T = 0,66 \text{ с}$ ;  $\lambda_{ct} = 0,035 \text{ м} = 3,5 \text{ см}$ .

**Другое решение.** Рассмотрим другой путь решения этой задачи, которым можно пользоваться и в случаях, когда действующие силы не являются потенциальными.

Выберем опять в качестве обобщенной координаты угол  $\varphi$  отклонения стержня  $I$  от вертикали, считая  $\varphi$  малым, и составим для системы уравнение Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \quad (14)$$

Кинетическую энергию  $T$  системы вычисляем так же, как в предыдущем случае и получим для нее значение (6), а для соответствующих производных — значения (7).

Для определения обобщенной силы  $Q$  следует изобразить на чертеже (рис. Д12, б) действующие активные силы, совершающие работу при перемещении системы. Это будут: сила упругости пружины  $\bar{F}$ , приложенная к стержню  $I$  в точке  $A$  и направлена вправо (пружину считаем растянутой), сила тяжести  $\bar{P}_1$ , приложенная к тому же стержню в точке  $C_1$  и сила тяжести  $\bar{P}_3$ , приложенная к грузу  $3$ ; обе эти силы направлены по вертикали вниз (на рис. Д12, б силы  $\bar{F}$ ,  $P_1$ ,  $\bar{P}_3$  не показаны, но при решении задачи таким путем их надо изображать).

Теперь сообщаем системе возможное перемещение, при котором угол  $\varphi$  получает положительное приращение  $\delta\varphi$ , и вычисляем работу всех названных сил на этом перемещении. Определяя работу сил  $\bar{F}$  и  $\bar{P}_1$  как произведение их моментов относительно точки  $O_1$  на угол поворота  $\delta\varphi$ , а работу силы  $\bar{P}_3$  как произведение ее на перемещение  $\delta s_3$  груза  $3$ , направленное по вертикали вниз, получим с учетом знаков

$$\delta A = \left( -F_l \cos \varphi + P_1 \frac{l}{2} \sin \varphi \right) \delta\varphi + P_3 \delta s_3. \quad (15)$$

В равенстве (15) надо выразить  $\delta s_3$  через  $\delta\varphi$ . Учтя, что зависимость между возможными перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями, найдем по аналогии с последним из равенств (5), что

$$\delta s_3 = \frac{2}{3} l \delta\varphi. \quad (16)$$

Определим еще значение силы упругости  $F$ . По модулю  $F=c\lambda$ , где  $\lambda$  — удлинение пружины, слагающееся из начального удлинения  $\lambda_{ct}$  и дополнительного удлинения  $s_A$ , которое ввиду малости угла  $\varphi$  можно считать равным  $l\varphi$ . Тогда  $\lambda=\lambda_{ct}+l\varphi$  и

$$F = c(\lambda_{ct} + l\varphi). \quad (17)$$

Подставив величины (16) и (17) в равенство (15) и приняв во внимание, что  $P_1=m_1g$ , а  $P_3=m_3g$  и что ввиду малости угла  $\varphi$  можно считать  $\cos\varphi=1$ ,  $\sin\varphi=\varphi$ , приведем окончательно это равенство к виду

$$\delta A = \left[ -c(\lambda_{ct} + l\varphi)l + \frac{1}{2}m_1gl\varphi + \frac{2}{3}m_3gl \right] \delta\varphi.$$

Коэффициент при  $\delta\varphi$  в правой части полученного равенства является искомой обобщенной силой. Следовательно,

$$Q = \left[ -c\lambda_{ct} + \left( \frac{m_1g}{2} - cl \right) \varphi + \frac{2}{3}m_3g \right] l. \quad (18)$$

Величину  $\lambda_{ct}$  опять находим исходя из того, что при равновесии, т. е. когда  $\varphi=0$ , должно быть и  $Q=0$ . В результате получим для  $\lambda_{ct}$  значение, которое дает формула (11). При этом значении  $\lambda_{ct}$  найдем из (18) окончательно, что

$$Q = \left( \frac{m_1g}{2} - cl \right) l\varphi. \quad (19)$$

Подставив значения соответствующих производных из равенств (7) и значение  $Q$ , которое дает формула (19), в уравнение (14) приведем его окончательно к виду

$$\ddot{\varphi} + \left( cl - \frac{m_1g}{2} \right) \frac{l}{a_0} \varphi = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) может иметь два существенно разных решения в зависимости от того, каким будет знак коэффициента при  $\varphi$ . Если этот коэффициент положителен, т. е.  $cl > m_1g/2$ , то, введя обозначение

$$k^2 = \left( cl - \frac{m_1g}{2} \right) \frac{l}{a_0}, \quad (21)$$

получим, как известно, решение уравнения (20) в виде

$$\varphi = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt).$$

Входящие сюда постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются по начальным условиям и будут выражены через начальный угол отклонения стержня  $\varphi_0$  и его начальную угловую скорость  $\dot{\varphi}_0$ .

По величинам  $\phi_0$  и  $\dot{\phi}_0$  всегда можно выбрать настолько малыми, что угол  $\phi$  во все время движения будет тоже оставаться малым и, следовательно, система будет совершать малые колебания около положения ее равновесия, определяемого углом  $\phi=0$ . Равновесие системы в таком случае называется *устойчивым*. Так как этот результат имеет место, когда

$$c > \frac{m_1 g}{2l}, \quad (22)$$

то неравенство (22) в данной задаче является условием устойчивости равновесия системы.

Если же коэффициент при  $\phi$  в уравнении (20) будет отрицательным, т. е. будет  $cl < m_1 g / 2$ , то, введя обозначение  $n^2 = m_1 g / 2 - cl$ , приведем уравнение (20) к виду  $\ddot{\phi} - n^2 \phi = 0$ . Решением этого уравнения, как тоже известно, будет

$$\phi = C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt}$$

и, каковы бы ни были начальные условия, множитель  $e^{nt}$ , а с ним и угол  $\phi$ , будут со временем возрастать, т. е. система, выведенная из равновесного положения любым сколь угодно малым смещением (или толчком), будет от этого положения все больше и больше отклоняться. Равновесие системы в таком случае называется *неустойчивым*.

В решаемой задаче  $c = 750$  Н/м, а  $m_1 g / 2l \approx 49$  Н/м и неравенство (22) выполняется. Следовательно, равновесие системы является устойчивым и она может совершать около положения равновесия малые колебания. Круговая частота  $k$  этих колебаний определяется из равенства (21), а период  $T = 2\pi/k$ . Числовые значения для искомых величин получаются, конечно, те же, которые были найдены выше в п. 5.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Методические указания . . . . .	3
Рабочая программа . . . . .	5
Литература . . . . .	10
Контрольные задания . . . . .	11
Содержание заданий, выбор вариантов, порядок выполнения работ, пояснения к тесту задач . . . . .	11
Задачи к контрольным заданиям . . . . .	13
Статика . . . . .	13
Кинематика . . . . .	32
Динамика . . . . .	50

**Людмила Ивановна Котова, Раиса Ивановна Надеева,  
Семен Михайлович Тарг, Василий Львович Цывильский,  
Инна Мироновна Шмарова**

## **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

### **Методические указания и контрольные задания**

Зав. редакцией К. И. Апошина

Редактор О. Г. Подобедона

Мл. редактор С. В. Мовчан

Художественный редактор Т. А. Дурасова

Технический редактор З. В. Нуждина

Корректор Г. А. Чечеткина

:

**Н/К**

Изд. № ОТ-408. Сдано в набор 25.03.82. Подп. в печать 09.09.82. Формат  
84×108 $\frac{1}{32}$ . Бум. тип. № 1. Гарнитура литературиая. Печать высокая. Объем  
5,88 усл. печ. л. 5,99 усл. кр.-отт. 5,88 уч.-изд. л. Тираж 126500 экз. Зак. № 70.  
Цена 20 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Владимирская типография «Союзполиграфпрома» при Государственном  
комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли

600000, г. Владимир. Октябрьский проспект, д. 7