МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Утверждено
Учебно-методическим управлением
по высшему образованию

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

для студентов-заочников теплоэнергетических, горных, металлургических, электроприборостроении и автоматизации и технологических специальностей, а также специальностей геологических, электротехнических, электронной техники и автоматики, химико-технологических и инженерно-экономических высших учебных заведений

Издание третье

ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. С. М. ТАРГА

МОСКВА „ВЫСШАЯ ШКОЛА“ 1983

ББК 22.21
Т 33
УДК 531.8

Теоретическая механика. Методические указания
Т33 и контрольные задания для студентов-заочников теплоэнергетических, горных, металлургических, электроприборостроения и автоматизации и технологических специальностей, а также специальностей геологических, электротехнических, электронной техники и автоматики, химико-технологических и инженерно-экономических высших учебных заведений/Под ред. проф. С. М. Тарга. — 3-е изд. — 64 с. М.: Высш. школа, 1983.

Авт.: Л. И. Котова, Г. И. Надеева, С. М. Тарг, В. Л. Цывильский, И. М. Шмарова.
10 к.

ББК 22.21
531 (07)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику.

1. Для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса, начиная со статики, широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) и аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведения двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике — дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики надо совершенно свободно уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2-го порядка, изучаемой в аналитической геометрии.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

2. При изучении материала курса по учебнику нужно прежде всего уяснить существо каждого излагаемого там вопроса. Главное — это понять изложенное в учебнике, а не „заучить".

Изучать материал рекомендуется по темам (пунктам приводимой ниже программы) или по главам (параграфам) учебника. Сначала следует прочитать весь материал темы (параграфа), особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным; часто это становится понятным из последующего. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения, и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, теорем и т. п. (они обычно бывают набраны в учебнике курсивом или разрядкой); в точных формулировках, как правило, бывает существенно каждое слово и очень полезно понять, почему данное положение сформулировано именно так. Однако не следует стараться заучивать формулировки; важно понять их смысл и уметь изложить результат своими словами.

Необходимо также понять ход всех доказательств (в механике они обычно не сложны) и разобраться в их деталях. Доказательства надо уметь воспроизводить самостоятельно, что не трудно сделать, поняв идею доказательства; пытаться просто их „заучивать" не следует, никакой пользы это не принесет.

Закончив изучение темы, полезно составить краткий конспект, по возможности не заглядывая в учебник.

При изучении курса особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив материал данной темы, надо сначала обязательно разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, обратив особое внимание на методические указания

по их решению. Затем постарайтесь решить самостоятельно несколько аналогичных задач из сборника задач И. В. Мещерского и после этого решите соответствующую задачу из контрольного задания.

3. Закончив изучение темы, нужно проверить, можете ли вы дать ответ на все вопросы программы курса по этой теме (осуществить самопроверку).

Поскольку все вопросы, которые должны быть изучены и усвоены, в программе перечислены достаточно подробно, дополнительные вопросы для самопроверки здесь не приводятся. Однако очень полезно составить перечень таких вопросов самостоятельно (в отдельной тетради) следующим образом.

Начав изучение очередной темы программы, выписать сначала в тетради последовательно все перечисленные в программе вопросы этой темы, оставив справа широкую колонку (поле). При этом если, например, в программе сказано „Условия равновесия пространственной и плоской систем сходящихся сил", то следует записать отдельно вопросы „Условия равновесия пространственной системы сходящихся сил" и „Условия равновесия плоской системы сходящихся сил" и т. п.

Затем по мере изучения материала темы (чтения учебника) следует в правой колонке указать страницу учебника, на которой излагается соответствующий вопрос, а также номер формулы или уравнения (уравнений), которые выражают ответ на вопрос математически. В результате в данной тетради будет полный перечень вопросов для самопроверки, который можно использовать и при подготовке к экзамену. Кроме того, ответив на вопрос или написав соответствующую формулу (уравнение), вы можете по учебнику быстро проверить, правильно ли это сделано, если в правильности своего ответа сомневаетесь. Наконец, по тетради с такими вопросами вы можете установить, весь ли материал, предусмотренный программой, вами изучен (если изучен весь материал, то против каждого вопроса в правой колонке будет указана соответствующая страница учебника).

Следует иметь в виду, что в различных учебниках материал может излагаться в разной последовательности. Поэтому ответ на какой-нибудь вопрос данной темы может оказаться в другой главе учебника. Например, в статике теорема о приведении системы сил к центру может быть дана сразу для произвольной системы сил (как указано в программе), а может быть дана сначала для плоской системы сил, а потом для произвольной и т. п.

Таким образом, изучая материал по одному из рекомендованных учебников, вы можете сначала получить ответы только на часть вопросов какой-нибудь темы, а ответы на остальные вопросы этой темы получить позже. Конечно, на изучении курса в целом это никак не скажется.

Указания по выполнению контрольных заданий приводятся ниже (после рабочей программы). Их надо прочитать обязательно и ими руководствоваться. Кроме того, к каждой задаче даются конкретные методические указания по ее решению и приводится пример решения.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА*

Студенты тех специальностей, в учебные планы (графики) которых входят три контрольных задания по теоретической механике, изучают весь материал данной программы. Студенты специальностей, в учебные планы (графики) которых входят два контрольных задания, вопросы или пункты программы, заключенные в скобки, изучать не должны.

---

* Составлена на основе программ по теоретической механике, утвержденных Учебно-методическим управлением по высшему образованию 18 февраля 1976 г. По решению кафедры для отдельных специальностей в рабочую программу могут включаться дополнительные вопросы, перечень которых должен быть сообщен студентам.

ВВЕДЕНИЕ

Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники. Объективный характер законов механики. Основные исторические этапы развития механики. Перспективы развития механики в свете решений XXVI съезда КПСС.

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные понятия и аксиомы статики. Предмет статики. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая, силы внешние и внутренние. Аксиомы статики. Связи и реакции связей. Основные виды связей: гладкая плоскость или поверхность, гладкая опора, гибкая нить, цилиндрический и сферический шарниры, невесомый стержень; реакции этих связей.

Система сходящихся сил. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Сходящиеся силы. Равнодействующая сходящихся сил. Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил. Аналитические условия равновесия пространственной и плоской систем сходящихся сил. (Теорема о равновесии трех непараллельных сил).

Теория пар сил. Момент силы относительно точки (центра) как вектор. Понятие о паре сил. Момент пары сил как вектор. Теоремы об эквивалентности пар. Сложение пар сил, произвольно расположенных в пространстве. (Условия равновесия системы пар сил).

Приведение произвольной системы сил к данному центру. Теорема о параллельном переносе силы. Основная теорема статики о приведении системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент системы сил.

Система сил, произвольно расположенных на плоскости (плоская система сил.) Алгебраическая величина момента силы. (Вычисление главного вектора и главного момента плоской системы сил. Частные случаи приведения плоской системы сил: приведение к паре сил, к равнодействующей и случай равновесия). Аналитические условия равновесия плоской системы сил. Условия равновесия плоской системы параллельных сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Равновесие системы тел. (Статически определимые и статически неопределимые системы. Равновесие при наличии сил трения.)

Система сил, произвольно расположенных в пространстве (пространственная система сил). Момент силы относительно оси. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр. (Аналитические формулы для вычисления моментов силы относительно трех координатных осей. Вычисление главного вектора и главного момента пространственной системы сил.) Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Условия равновесия пространственной системы параллельных сил.

Центр тяжести. Центр тяжести твердого тела и его координаты. Центр тяжести объема, площади и линии. Способы определения положения центров тяжести тел.

КИНЕМАТИКА

Введение в кинематику. Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

Кинематика точки. Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Скорость точки как производная от ее радиуса-вектора по времени. Ускорение точки как производная от вектора скорости по времени. Координатный способ задания движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Определение траектории точки. Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси.

Естественный способ задания движения точки. Оси естественного трехгранника. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трехгранника: касательное и нормальное ускорения точки.

Кинематика твердого тела

Поступательное и вращательное движения твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение (закон) вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Вектор угловой скорости тела. Выражение скорости точки вращающегося тела в виде векторного произведения.

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса; независимость угловой скорости фигуры от выбора полюса. Определение скорости любой точки фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры (тела). Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.

Сложное (составное) движение точки. Абсолютное и относительное движения точки; переносное движение. Теорема о сложении скоростей. Теорема о сложении ускорений при переносном поступательном и переносном вращательном движениях: кориолисово ускорение и его вычисление.

ДИНАМИКА

Введение в динамику. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Законы механики Галилея — Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах. (Уравнения движения материальной точки в проекциях на оси естественного трехгранника.) Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение первой задачи динамики.

Решение второй задачи динамики. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения точки в случаях силы, зависящей от времени, от положения точки и от ее скорости.

Относительное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки; переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

Прямолинейные колебания точки. Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию от центра колебаний. Амплитуда, начальная фаза, частота и период колебаний. Затухающие колебания материальной точки при сопротивлении, пропорциональном скорости; период этих колебаний, декремент колебаний. Вынужденные колебания точки при гармонической возмущающей силе и сопротивлении, пропорциональном скорости. Резонанс.

Введение в динамику механической системы. Механическая система. Классификация сил, действующих на систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс; радиус-вектор и координаты центра масс.

Момент инерции. Момент инерции твердого тела относительно оси; радиус инерции. Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных

осей. Примеры вычисления моментов инерции: моменты инерции однородного тонкого стержня, тонкого круглого кольца или полого цилиндра, круглого диска или сплошного круглого цилиндра.

Общие теоремы динамики

Теорема о движении центра масс. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

Теорема об изменении количества движения. Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени. Теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной и в конечной формах.

Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и в конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы.

Теорема об изменении момента количества движения. Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении момента количества движения точки. (Сохранение момента количества движения точки в случае центральной силы; закон площадей.)

Главный момент количеств движения или кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента механической системы.

Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия материальной точки. Элементарная работа силы; аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. Мощность. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении тела. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Равенство нулю суммы работ внутренних сил в твердом теле. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

Принцип Даламбера. Сила инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы.

Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики. (Возможные или виртуальные перемещения точки и механической системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.)

Уравнения Лагранжа. Обобщенные координаты системы; обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Воронков И. М. Курс теоретической механики. — М., 1954 и последующие издания.

Гернет М. М. Курс теоретической механики. — М., 1970 и последующие издания.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. 3-е изд. — М., 1963 и последующие издания.

Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. — М., 1952 и последующие издания.

Дополнительная

Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осецкий В. М. Руководство к решению задач по теоретической механике. — М., 1965 и последующие издания.

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. I, II. — М., 1961 и последующие издания.

Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 1, 2. — М., 1970, 1971 и последующие издания.

Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л. Курс теоретической механики. — М., 1966 и последующие издания.

Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Ч.I. — М., 1962 и последующие издания.

Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Ч.II. — М., 1962 и последующие издания.

Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике/Под ред. А. А. Яблонского. — М., 1972 и последующие издания. (Содержит примеры решения задач.)

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ОБЩИЕ ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

У студентов, которые по учебному плану (графику) выполняют три контрольных задания (три работы), содержание заданий следующее:

задание 1 (статика и кинематика) — задачи С2, С3, К1, К2, К3;

задание 2 (динамика) — задачи Д1, Д2, Д3, Д4;

задание 3 (динамика) — задачи Д5, Д6, Д7, Д8.

У студентов, которые по учебному плану (графику) выполняют два контрольных задания (две работы), содержание заданий следующее:

задание 1 (статика и кинематика) — задачи С1, С3, К1, К2, К3;

задание 2 (динамика) — задачи Д1, Д3, Д4, Д5, Д9.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С1.4 — это рис. 4 к задаче С1 и т. д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т. д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице — по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач и год издания контрольных заданий.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывать). Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы, число тел и их распо-

ложение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получится более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы измерения получаемых величин нужно обязательно. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут и будут возвращаться для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа. На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам С1 — С3 и Д1—Д9 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам — вертикальными и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела *1*, P_2, l_2, r_2 — тела *2* и т. д. Аналогично в кинематике и динамике v_B, a_B обозначают скорость и ускорение точки *B*, v_C, a_C — точки *C*; ω_1, ε_1 — угловую скорость и угловое ускорение тела *1*, ω_2, ε_2 — тела *2* и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи. Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т. е. к номеру вашего рисунка или вашего условия в табаце.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой „Указания"; затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера — разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

СТАТИКА

Задача С1

Жесткая рама (рис. С1.0 — С1.9, табл. С1) закреплена в точке *A* шарнирно, а в точке *B* прикреплена или к невесомому стержню BB_1, или к шарнирной опоре на катках; стержень прикреплен к раме и к неподвижной опоре шарнирами.

На раму действуют пара сил с моментом $M = 60$ Н·м и две силы, величины которых, направления и точки приложения указаны в таблице (например,

в условиях № 1 на раму действуют сила $F_1 = 10$ Н под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке K, и сила $F_4 = 40$ Н под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке H).

Определить реакции связей в точках A и B, вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять $l = 0{,}5$ м.

Указания. Задача CI — на равновесие тела под действием плоской системы сил. Составляя уравнения равновесия, учесть, что уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей (в данном случае относительно точки A). При вычислении момента силы $\overline{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, для которых плечи легко вычисляются, в частности на составляющие, параллельные координатным осям, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_O(\overline{F}) = m_O(\overline{F}') + m_O(\overline{F}'')$.

Таблица CI

Сила	F_1, α_1		F_2, α_2		F_3, α_3		F_4, α_4	
	F_1=10 Н		F_2=20 Н		F_3=30 Н		F_4=40 Н	
Номер условия	Точка прилож.	α_1, °	Точка прилож.	α_2, °	Точка прилож.	α_3, °	Точка прилож.	α_4, °
0	—	—	D	60	E	45	—	—
1	K	30	—	—	—	—	H	60
2	—	—	H	45	K	30	—	—
3	D	60	—	—	—	—	E	30
4	—	—	K	30	E	60	—	—
5	H	60	—	—	D	30	—	—
6	—	—	E	30	—	—	K	45
7	D	45	—	—	H	60	—	—
8	—	—	H	60	—	—	D	30
9	E	30	—	—	—	—	K	60

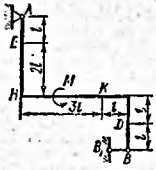

Рис. CI.0

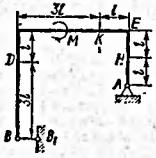

Рис. CI.1

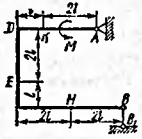

Рис. CI.2

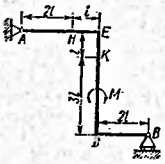

Рис. С1.3

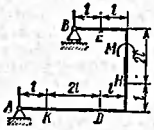

Рис. С1.4

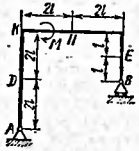

Рис. С1.5

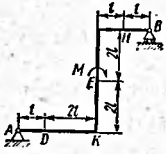

Рис. С1.6

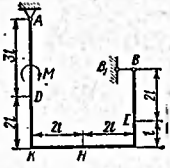

Рис. С1.7

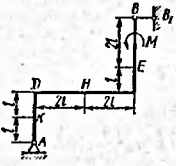

Рис. С1.8

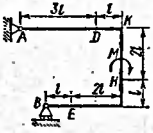

Рис. С1.9

Пример С1. Жесткая пластина *ABCD* (рис. С1) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* — подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: $F = 25$ кН, $\alpha = 60°$, $P = 18$ кН, $\gamma = 75°$, $M = 50$ кН · м, $\beta = 30°$, $l = 0.5$ м.

Определить: реакции в точках *A* и *B*, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные

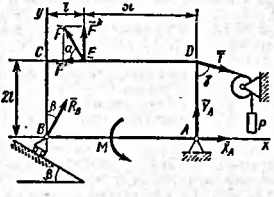

Рис. С1

оси xy и изобразим действующие на пластину силы: силу $\overline{F}$, пару сил с моментом M, натяжение троса $\overline{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}'$, $\overline{F}''$ ($F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$) и учтем, что $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}'')$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0,\quad X_A + R_B\sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0,\quad Y_A + R_B\cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0, \tag{2}$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,\quad M - R_B\cos\beta\cdot 4l + F\cos\alpha\cdot 2l - F\sin\alpha\cdot 3l - T\sin\gamma\cdot 2l = 0. \tag{3}$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: $X_A = -8{,}5$ кН, $Y_A = -23{,}3$ кН, $R_B = 7{,}3$ кН. Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ направлены противоположно показанным на рис. С1.

Задача С2

Однородные брусья AC весом $P_1 = 15$ Н и BD (или BC) весом $P_2 = 25$ Н расположены в вертикальной плоскости (рис. С2.0—С2.9, табл. С2). В точке C брусья или свободно опираются друг о друга (рис. 0—5), или соединены шарниром (рис. 6—9). Внешними связями являются шарнир в точке A, невесомый стержень KK_1, шарнир в точке B (на рис. 0—5), выступ H (на рис. 6) и гладкая плоскость (на рис. 7—9 в точке B).

На брусья кроме сил тяжести действуют пара сил с моментом $M = 50$ Н·м и сила, величина которой, направление и точка приложения указаны в табл. С2 (например, по условиям № 1 таблицы на брус действует сила $F_2 = 20$ Н, приложенная в точке E и направленная под углом $\alpha_2 = 30°$ к горизонтальной оси).

Определить реакции связей в точках A, B, C и K (на рис. 6 в точках A, C, K и H). При окончательных расчетах принять $l = 0{,}2$ м.

Указания. Задача С2 — на равновесие системы двух тел (брусьев), находящихся под действием плоской системы сил. Задачу можно решать двумя путями. Первый: расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из брусьев в отдельности, составив для каждого бруса три уравнения равновесия и учтя при изображении реакций в точке C закон о равенстве действия и противодействия. Второй: сначала рассмотреть равновесие всей системы, составив для нее три уравнения равновесия, а затем расчленить систему и рассмотреть равновесие одного из брусьев, составив для него тоже три уравнения равновесия (см. еще указания к задаче С1).

Таблица С2

Сила	F_1		F_2		F_3		F_4	
	F_1=10 Н		F_2=20 Н		F_3=30 Н		F_4=40 Н	
Номер условия	Точка прилож.	α_1, °	Точка прилож.	α_2, °	Точка прилож.	α_3, °	Точка прилож.	α_4, °
0	D	60	—	—	—	—	—	—
1	—	—	E	30	—	—	—	—
2	—	—	—	—	D	60	—	—
3	—	—	—	—	—	—	E	30
4	E	60	—	—	—	—	—	—
5	—	—	D	30	—	—	—	—
6	—	—	—	—	E	50	—	—
7	—	—	—	—	—	—	D	30
8	D	75	—	—	—	—	—	—
9	—	—	E	15	—	—	—	—

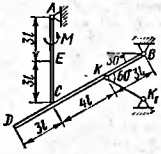

Рис. С2.0

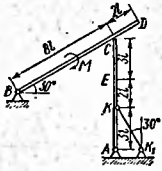

Рис. С2.1

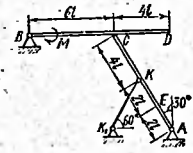

Рис. С2.2

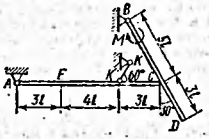

Рис. С2.3

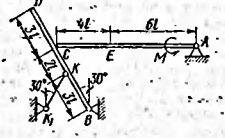

Рис. С2.4

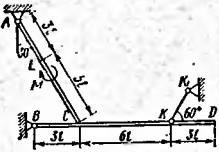

Рис. С2.5

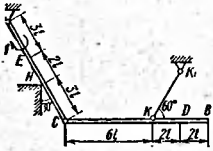

Рис. С2.6

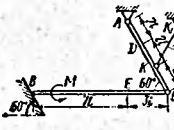

Рис. С2.7

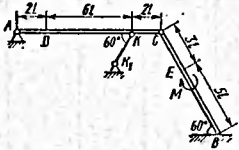

Рис. С2.8

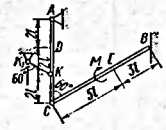

Рис. С2.9

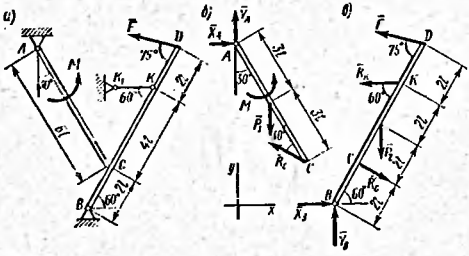

Рис. С2

Пример С2. Однородные брусья AC и BD весом соответственно P_1 и P_2 расположены в вертикальной плоскости (рис. С2, *а*). Брусья свободно опираются друг о друга в точке C, а в точках A и B имеют неподвижные шарнирные опоры; в точке K брус BD закреплен невесомым стержнем KK_1. Все нагрузки, размеры и величины углов показаны на рисунке.

Дано: $P_1 = 15$ Н, $P_2 = 25$ Н, $M = 20$ Н · м, $F = 30$ Н, $l = 0{,}2$ м.

Определить: реакции связей в точках A, B, C и K.

Решение. 1. Расчленим систему на две части и рассмотрим сначала равновесие бруса AC (рис. С2, *б*). Проведем координатные оси и изобразим действующие на брус AC силы: силу тяжести $\overline{P_1}$, пару сил с моментом M, реакции связей $\overline{X_A}$, $\overline{Y_A}$, $\overline{R_C}$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изо-

бражаем двумя ее составляющими, реакция $\overline{R}_C$ направлена перпендикулярно брусу BD).

Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A - R_C \sin 60° = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - P_1 + R_C \cos 60° = 0, \tag{2}$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad M - P_1 \cdot 3l \sin 30° - R_C \cdot 6l \sin 30° = 0. \tag{3}$$

2. Теперь рассмотрим равновесие бруса BD (рис. С2, *в*). На него действуют сила тяжести $\overline{P}_2$, сила $\overline{F}$, реакции внешних связей $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, $\overline{R}_K$ и давление $\overline{R}'_C$ со стороны бруса AC, которое на основании равенства действия и противодействия направлено противоположно силе $\overline{R}_C$.

Для полученной плоской системы сил тоже составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_B + R'_C \sin 60° - R_K - F \cos 15° = 0, \tag{4}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_B - R'_C \cos 60° - P_2 + F \sin 15° = 0, \tag{5}$$

$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0, \quad -R'_C \cdot 2l - P_2 \cdot 4l \cos 60° + R_K \cdot 6l \sin 60° + F \cdot 8l \sin 75° = 0. \tag{6}$$

Решив систему уравнений (1) — (6) и учтя при этом, что численно $R'_C = R_C$, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = 22{,}4$ Н, $Y_A = 2{,}1$ Н, $X_B = -18{,}5$ Н, $Y_B = 30{,}1$ Н, $R_C = 25{,}8$ Н, $R_K = -25{,}1$ Н.

Из полученных результатов видно, что силы $\overline{X}_B$ и $\overline{R}_K$ направлены противоположно показанным на рис. С2, *в*.

Задача С3

Однородная прямоугольная плита весом $P = 3$ кН со сторонами $AB = 3l$, $BC = 2l$ закреплена в точке A сферическим шарниром, а в точке B цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC' (рис. С3.0—С3.9).

На плиту действуют пара сил с моментом $M = 5$ кН·м, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Величины этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С3; при этом силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_1$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xy, сила $\overline{F}_2$ — в плоскости, параллельной xz, и сила $\overline{F}_3$ — в плоскости, параллельной yz. Точки приложения сил (D, E, H) находятся в серединах сторон плиты.

Определить реакции связей в точках A, B и C. При подсчетах принять $l = 0{,}8$ м.

Указания. Задача С3 — на равновесие тела под действием пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (или подпятника) имеет три составляющие, а реакции цилиндрического шарнира (подшипника) — две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При вычислении моментов силы $\overline{F}$ тоже часто удобно разложить ее на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, параллельные координатным осям; тогда по теореме Вариньона $m_x(\overline{F}) = m_x(\overline{F}') + m_x(\overline{F}'')$ и т. д.

Таблица С3

Сила	F_1=4 кН		F_2=6 кН		F_3=8 кН		F_4=10 кН	
Номер условия	Точка прилож.	α_1, °	Точка прилож.	α_2, °	Точка прилож.	α_3, °	Точка прилож.	α_4, °
0	D	60	—	—	E	0	—	—
1	H	90	D	30	—	—	—	—
2	—	—	E	60	—	—	D	90
3	—	—	—	—	E	30	H	0
4	E	0	—	—	H	60	—	—
5	—	—	D	60	H	0	—	—
6	—	—	H	30	—	—	D	90
7	E	30	H	90	—	—	—	—
8	—	—	—	—	D	0	E	60
9	—	—	E	90	D	30	—	—

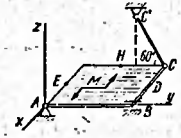

Рис. С3.0

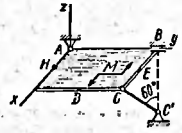

Рис. С3.1

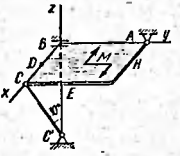

Рис. С3.2

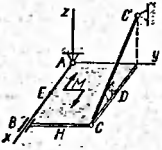

Рис. С3.3

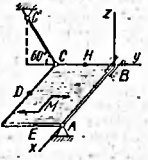

Рис С3.4

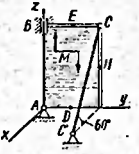

Рис. С3.5

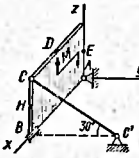

Рис. С3.6

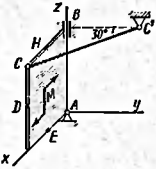

Рис. С3.7

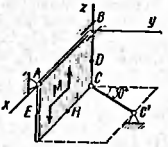

Рис. С3.8

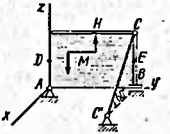

Рис. С3.9

Пример С3. Вертикальная прямоугольная плита весом P (рис. С3) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD', лежащим в плоскости, параллельной плоскости yz. На плиту действуют сила $\overline{F_1}$ (в плоскости xz), сила $\overline{F_2}$ (параллельная оси y) и пара сил с моментом M (в плоскости плиты).

Дано: $P = 5$ кН, $M = 3$ кН·м, $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 7{,}5$ кН, $\alpha = 30°$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $CE = 0{,}5\ AB$, $BK = 0{,}5\ BC$.

Определить: реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На нее действуют заданные силы P, $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ и пара сил с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\overline{X_A}$, $\overline{Y_A}$, $\overline{Z_A}$, цилиндрического (подшипника) — на две составляющие $\overline{Y_B}$, $\overline{Z_B}$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию $\overline{N}$ стержня направим вдоль стержня, предполагая, что он растянут.

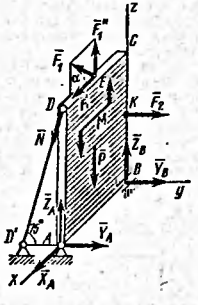

Рис. С3

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + F_1 \cdot \cos\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + F_2 - N\cos 75° = 0, \qquad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - P - N\sin 75° + F_1 \sin\alpha = 0, \qquad (3)$$

$$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0. - F_2 \cdot BK + N\cos 75^\circ \cdot BC = 0, \quad (4)$$

$$\sum m_y(\overline{F}_k) = 0, \; P\frac{AB}{2} + F_1\cos\alpha \cdot BC - F_1\sin\alpha \cdot \frac{AB}{2} -$$

$$- Z_A \cdot AB + N\sin 75^\circ \cdot AB + M = 0, \quad (5)$$

$$\sum m_z(\overline{F}_k) = 0, \; Y_A \cdot AB - N\cos 75^\circ \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Для определения момента силы $\overline{F}_1$ относительно оси y разлагаем $\overline{F}_1$ на составляющие $\overline{F}_1'$ и $\overline{F}_1''$, параллельные осям x и z ($F_1' = F_1\cos\alpha$, $F_1'' = F_1\sin\alpha$) и применяем теорему Вариньона (см. указания). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\overline{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив затем эти уравнения, найдем, чему равны искомые реакции.

Ответ: $X_A = -5{,}2$ кН, $Y_A = 3{,}8$ кН, $Z_A = 28{,}4$ кН, $Y_B = -7{,}5$ кН, $Z_B = -12{,}4$ кН, $N = 14{,}5$ кН. Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_B$ и $\overline{Z}_B$ направлены противоположно показанным на рис. С3.

КИНЕМАТИКА

Задача К1

Точка B движется в плоскости xy (рис. К1.0—К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t — в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость и ускорение точки; а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. 0—2 в столбце 2, для рис. 3—6 в столбце 3, для рис. 7—9 в столбце 4). Как и в задачах С1—С5, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра; а номер условия в табл. К1 — по последней.

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1 = 1$ с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Таблица К1

Номер условия	$y = f_2(t)$		
	Рис. 0—2	Рис. 3—6	Рис. 7—9
1	2	3	4
0	$4 - 9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$t^2 - 2$	$-4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
1	$2 - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Номер условия	$y=f_3(t)$		
	Рис. 0—2	Рис. 3—6	Рис. 7—9
1	2	3	4
2	$4-6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4+2t^2$	$12\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
3	$12\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2(t+1)^2$	$2-4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+5$	$2+2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+13$
5	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2-2$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
6	$8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-3$	$(t+1)^3$	$16\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)-14$
7	$-9\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3-4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-4$	$2t^3$	$4-9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+6$

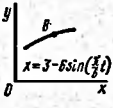

Рис. К1.0

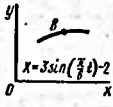

Рис. К1.1

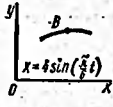

Рис. К1.2

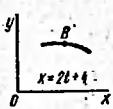

Рис. К1.3

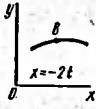

Рис. К1.4

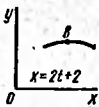

Рис. К1.5

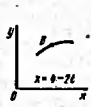

Рис. К1.6

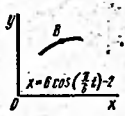

Рис. К1.7

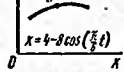

Рис. К1.8

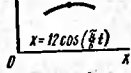

Рис. К1.9

Пример К1. Даны уравнения движения точки в плоскости xy:

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3; \quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y — в сантиметрах, t — в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \qquad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2};$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (парабола, рис. К1):

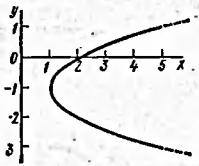

Рис. К1

$$x = (y+1)^2 + 1. \qquad (2)$$

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

и при $t = 1$ с

$$v_{1x} = 1{,}11 \text{ см/с}, \; v_{1y} = 0{,}73 \text{ см/с}, \; v_1 = 1{,}33 \text{ см/с}, \qquad (3)$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right);\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при $t = 1$ с

$$a_{1x} = 0{,}87 \text{ см/с}^2,\ a_{1y} = -0{,}12 \text{ см/с}^2,\ a_1 = 0{,}88 \text{ см/с}^2. \qquad (4)$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Получим

$$2v\frac{dv}{dt} = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt} \text{ и}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \qquad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при $t_1 = 1$ с $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2/a_n$. Подставляя сюда числовые значения v_1 и a_{1n}, найдем, что при $t_1 = 1$ с $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Ответ: $v_1 = 1{,}33$ см/с, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2, $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2, $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2, $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Задача К2

Плоский механизм состоит из стержней *1—4* и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами (рис. К2.0—К2.9). Длины стержней: $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $l_4 = 0{,}8$ м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ, которые вместе с другими величинами заданы в табл. К2. Точка *D* на всех рисунках и точка *K* на рис. 7—9 в середине соответствующего стержня. Определить величины, указанные в таблице в столбце „Найти".

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа должны откладываться соответствующие углы, т. е. по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. 1 следует отложить от стержня *DE* против хода часовой стрелки, а на рис. 2—от стержня *AE* по ходу часовой стрелки).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун *B* и его направляющие для большей наглядности изобразить, как в примере К2 (см. рис. К2). Заданную угловую скорость считать направленной против хода часовой стрелки, а заданную скорость v_B—от точки *B* к *b*.

Указания. Задача К2—на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

Таблица К2

Номер условия	Углы					Дано			Найти
	α°	β°	γ°	φ°	θ°	ω_1, 1/с	ω_1, 1/с	v_B, м/с	
0	30	150	120	0	60	6	—	—	v_B, v_E, ω_2
1	60	60	60	90	120	—	3	—	v_A, v_D, ω_3
2	0	120	120	0	60	—	—	10	v_A, v_E, ω_3
3	90	120	90	90	60	10	—	—	v_B, v_E, ω_2
4	0	150	30	0	60	—	4	—	v_B, v_A, ω_2
5	60	150	120	90	30	—	—	8	v_A, v_E, ω_3
6	30	120	30	0	60	8	—	—	v_B, v_E, ω_3
7	90	150	120	90	30	—	5	—	v_A, v_D, ω_3
8	0	60	30	0	120	—	—	6	v_A, v_E, ω_2
9	30	120	120	0	60	4	—	—	v_B, v_E, ω_3

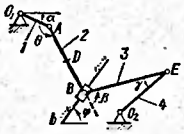

Рис. К2.0

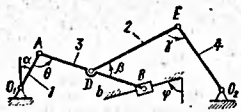

Рис. К2.1

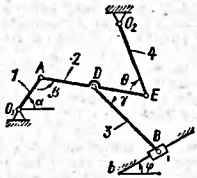

Рис. К2.2

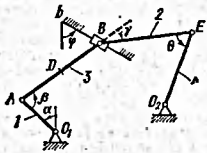

Рис. К2.3

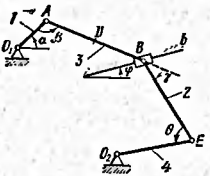

Рис. К2.4

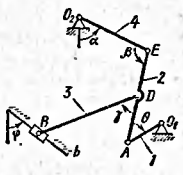

Рис. К2.5

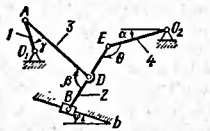

Рис. К2.6

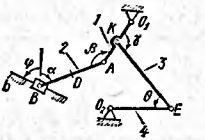

Рис. К2.7

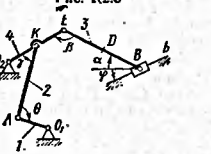

Рис. К2.8

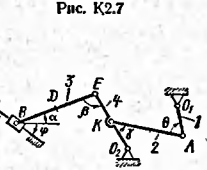

Рис. К2.9

Пример К2. Механизм (рис. К2, *а*) состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 0°$, $\theta = 30°$, $AD = DE$, $l_1 = 0{,}6$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $\omega_1 = 5$ с$^{-1}$.

Определить: v_B, v_E, ω_3.

Рис. К2

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К2, *б*).

2. Определяем $\bar{v}_E$. Точка *E* принадлежит стержню *AE*. Чтобы найти v_E, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{v}_E$. По данным задачи можем определить $\bar{v}_A$:

$$v_A = \omega_1 \cdot l_1 = 5 \cdot 0{,}6 = 3 \text{ м/с}, \ \bar{v}_A \perp O_1A. \qquad (1)$$

Направление $\overline{v}_E$ найдем, учтя, что точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2; следовательно, $\overline{v}_E \perp O_2E$. Теперь, зная $\overline{v}_A$ и направление $\overline{v}_E$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AE) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AE). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\overline{v}_E$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_E \cos 60° = v_A \cos 30°, \quad v_E = 3\sqrt{3} = 5{,}2 \text{ м/с}. \qquad (2)$$

3. Определяем $\overline{v}_B$. Точка B принадлежит стержню BD. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\overline{v}_B$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AE. Для этого, зная $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_E$, построим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AE; это точка C_2, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_E$, восставленных из точек A и E (к $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_E$ перпендикулярны стержни *1* и *4*). По направлению вектора $\overline{v}_A$ определяем направление поворота стержня AE вокруг МЦС C_2. Вектор $\overline{v}_D$ будет перпендикулярен отрезку C_2D, соединяющему точки D и C_2, и направлен в сторону поворота. Величину v_D найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_2D} = \frac{v_A}{C_2A}. \qquad (3)$$

Чтобы вычислить C_2D и C_2A, заметим, что $\triangle AC_2E$ — прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30 и 60°, и что $C_2A = AE \sin 30° = 0{,}5\ AE = AD$. Тогда $\triangle AC_2D$ является равносторонним и $C_2A = C_2D$. В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_A = 3 \text{ м/с}; \ \overline{v}_D \perp C_2D. \qquad (4)$$

Так как точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно, то направление $\overline{v}_B$ известно. Тогда, восставляя из точек B и D перпендикуляры к скоростям $\overline{v}_B$ и $\overline{v}_D$, построим МЦС C_3 стержня BD. По направлению вектора $\overline{v}_D$ определяем направление поворота стержня BD вокруг центра C_3. Вектор $\overline{v}_B$ будет направлен в сторону поворота стержня BD. Из рис. К2, *б* видно, что $\angle C_3DB = 30°$, а $\angle DC_3B = 90°$, откуда $C_3B = l_3 \sin 30°$, $C_3D = l_3 \cos 30°$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_B}{C_3B} = \frac{v_D}{C_3D}, \quad v_B = v_D \cdot \operatorname{tg} 30° = 1{,}7 \text{ м/с}. \qquad (5)$$

4. Определяем ω_3. Так как МЦС стержня *3* известен (точка C_3), то

$$\omega_3 = \frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_D}{l_3 \cos 30°} = 2{,}9 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $v_E = 5{,}2$ м/с, $v_B = 1{,}7$ м/с, $\omega_3 = 2{,}9$ с$^{-1}$.

Задача К3

Прямоугольная пластина (рис. К3.0—К3.5) или круглая пластина радиуса $R = 60$ см (рис. К3.6—К3.9) вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω, заданной в табл. К3 (при знаке минус направление ω противоположно показанному на рисунке). Ось вращения на рис. 0—3 и 8, 9 перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 4—7 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 0—5) или по окружности радиуса R, т. е. по ободу пластины (рис. 6—9), движется точка M. Закон ее относительного движения, выражаемый уравнением $s = AM = f(t)$ (s — в сантиметрах, t — в секундах), задан в табл. К3 отдельно для рис. 0—5 и для рис. 6—9, при этом на рис. 6—9 $s = \overset{\smile}{AM}$ и отсчитывается по дуге окружности; там же даны размеры b и l. На всех рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Указания. Задача К3 — на сложное движение точки. При ее решении движение точки по пластине считать относительным, а вращательное движение самой пластины — переносным и воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить расчеты, следует изобразить точку M на пластине в том положении, в котором нужно определить ее абсолютную скорость (или ускорение), а не в произвольном положении, показанном на рисунках к задаче.

В случаях, относящихся к рис. 6—9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Таблица К3

Номер условия	ω, 1/с	Рис. 0—5		Рис. 6—9	
		b, см	$s = AM = f(t)$	l	$s = \overset{\smile}{AM} = f(t)$
0	-2	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{3} R(t^4 - 3t^2)$
1	4	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{3} R(t^3 - 2t)$
2	3	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{6} R(3t - t^2)$
3	-4	12	$40(t^3 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4} R$	$\frac{\pi}{2} R(t^3 - 2t^2)$
4	-3	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3} R(3t^2 - t)$
5	2	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3} R(4t^2 - 2t^3)$
6	4	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3} R$	$\frac{\pi}{2} R(t - 2t^2)$
7	-5	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3} R(2t^2 - 1)$
8	2	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6} R(t - 5t^2)$
9	-5	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3} R$	$\frac{\pi}{2} R(2t^2 - t^3)$

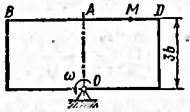

Рис. К3.0

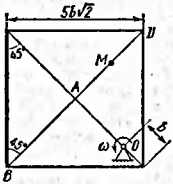

Рис. К3.1

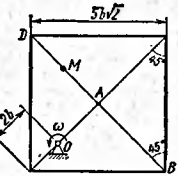

Рис. К3.2

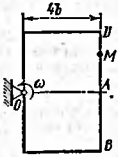

Рис. К3.3

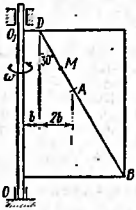

Рис. К3.4

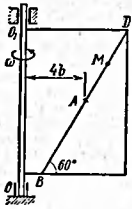

Рис. К3.5

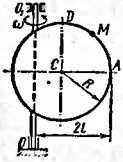

Рис. К3.6

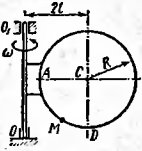

Рис. К3.7

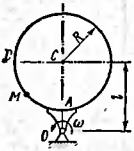

Рис. К3.8

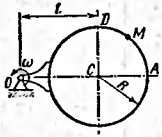

Рис. К3.9

Пример К3. Шар радиуса R (рис. К3, *а*) вращается вокруг своего диаметра AB по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К3, *а* дуговой стрелкой). По дуге большого круга („меридиану") $\overset{\frown}{ADB}$ движется точка M по закону $s = \overset{\frown}{AM} = f_2(t)$; положительное направление отсчета расстояния s от A к D.

Дано: $R = 0{,}5$ м, $\varphi = -2t$, $s = (\pi R/6)(7t - 2t^2)$ (φ — в радианах, s — в метрах, t — в секундах).

Определить: $v_{аб}$ и $a_{аб}$ в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение: Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге $\overset{\frown}{ADB}$ относительным ($\overset{\frown}{AB}$ — относительная траектория точки), а вращение шара — переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{v}_{аб}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{аб}$ точки найдутся по формулам:

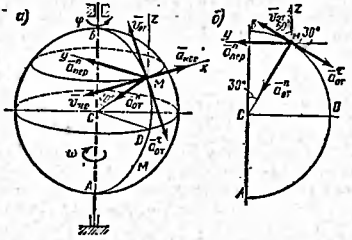

Рис. К3

$$\bar{v}_{аб} = \bar{v}_{от} + \bar{v}_{пер}, \quad \bar{a}_{аб} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \tag{1}$$

где, в свою очередь,

$$\bar{a}_{от} = \bar{a}^{\tau}_{от} + \bar{a}^{n}_{от}, \quad \bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}.$$

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$S = \overset{\frown}{AM} = \frac{\pi R}{6}(7t - 2t^2). \tag{2}$$

Сначала установим, где будет находиться точка M на дуге ADB в момент времени t_1. Полагая в уравнении (2) $t = 1$ с, получим $s_1 = \frac{5}{6}\pi R$. Тогда $\angle ACM = \frac{s_1}{R} = \frac{5}{6}\pi = 150°$ или $\angle BCM = 30°$. Изображаем на рис. К3, *а* точку в положении, определяемом этим углом.

Теперь находим числовые значения $v_{от}$, $a^{\tau}_{от}$ и $a^{n}_{от}$:

$$v_{от} = \dot{s} = \frac{\pi R}{6}(7 - 4t), \quad a^{\tau}_{от} = \dot{v}_{от} = -\frac{2}{3}\pi R,$$

$$a^{n}_{от} = \frac{v^2_{от}}{\rho_{от}} = \frac{v^2_{от}}{R},$$

где $\rho_{от}$ — радиус кривизны относительной траектории, т. е. дуги ADB. Для момента времени $t_1 = 1$ с, учитывая, что $R = 0{,}5$ м, получим:

$$v_{от} = \frac{\pi R}{6}3 = \frac{\pi}{4} \text{ м/с}, \quad a^{\tau}_{от} = -\frac{\pi}{3} \text{ м/с}^2, \quad a^{n}_{от} = \frac{\pi^2}{8} \text{ м/с}^2. \tag{3}$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{v}_{от}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\bar{a}^{\tau}_{от}$ — в противоположную сторону; вектор $\bar{a}^{n}_{от}$ направлен к центру C дуги $\overset{\frown}{ADB}$. Изображаем все эти векторы на рис. К3, *а*. Для наглядности приведен рис. К3, *б*, где дуга $\overset{\frown}{ADB}$ совмещена с плоскостью чертежа.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = -2t$. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения: $\omega = \dot{\varphi} = -2$, $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$ (шар вращается равномерно). Таким образом,

$$\omega = -2\,\text{с}^{-1},\ \varepsilon = 0. \tag{4}$$

Знак указывает, что направление ω противоположно положительному направлению отсчета угла φ: отметим это на рис. К3, *а* соответствующей дуговой стрелкой.

Для определения $\bar{v}_{пер}$ и $\bar{a}_{пер}$ найдем сначала расстояние h точки M от оси вращения: $h = R\sin 30^\circ = 0{,}25$ м. Тогда в момент времени $t_1 = 1$ с, учитывая равенства (4), получим:

$$v_{пер} = |\omega|\,h = 0{,}5\ \text{м/с},$$

$$a^{\tau}_{пер} = \varepsilon \cdot h = 0,\ a^{n}_{пер} = \omega^2 h = 1\ \text{м/с}^2. \tag{5}$$

Изображаем на рис. К3, *а* вектор $\bar{v}_{пер}$ с учетом направления ω и вектор $\bar{a}^{n}_{пер}$ (направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\bar{v}_{от}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) равен 60°, то численно в момент времени $t_1 = 1$ с [см. равенства (3) и (4)]

$$a_{кор} = 2\,|v_{от}| \cdot |\omega| \cdot \sin 60^\circ = 2\,\frac{\pi}{4} \cdot 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}72\ \text{м/с}^2. \tag{6}$$

Направление $\bar{a}_{кор}$ найдем, спроектировав вектор $\bar{v}_{от}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как вектор $\bar{a}^{n}_{пер}$), и повернув затем эту проекцию в сторону ω, т. е. по ходу часовой стрелки, на 90°. Иначе направление $\bar{a}_{кор}$ можно найти, учтя, что $\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{от})$. Изображаем вектор $\bar{a}_{кор}$ на рис. К3, *а*.

Теперь можно вычислить значения $v_{аб}$ и $a_{аб}$.

4. Определение $v_{аб}$. Так как $\bar{v}_{аб} = \bar{v}_{от} + \bar{v}_{пер}$, а векторы $\bar{v}_{от}$ и $\bar{v}_{пер}$ взаимно перпендикулярны (см. рис. К3, *а*), то в момент времени $t_1 = 1$ с

$$v_{аб} = \sqrt{v^2_{от} + v^2_{пер}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0{,}5)^2} = 0{,}93\ \text{м/с}.$$

5. Определение $a_{аб}$. По теореме о сложении ускорений, так как $a^{\tau}_{пер} = 0$, будет

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}^{\tau}_{от} + \bar{a}^{n}_{от} + \bar{a}^{n}_{пер} + \bar{a}_{кор}. \tag{7}$$

Для определения $a_{аб}$ проведем координатные оси $Mxyz$ (рис. К3, *а*) и вычислим проекции вектора $\bar{a}_{аб}$ на эти оси. Учтем при этом, что вектор $\bar{a}_{кор}$ лежит на проведенной оси x, а векторы $\bar{a}^{\tau}_{от}$, $\bar{a}^{n}_{от}$ и $\bar{a}^{n}_{пер}$ расположены в плоскости дуги $\overset{\frown}{ADB}$, т. е. в плоскости Myz (рис. К3, *б*). Тогда, проектируя обе

части равенства (7) на координатные оси и учтя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени $t_1 = 1$ с:

$$a_{абx} = a_{кор} = 2{,}72 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{абy} = a^n_{пер} + a^n_{от} \cos 60° - \left| a^\tau_{от} \right| \cos 30° = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0{,}71 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{абz} = -\left| a^\tau_{от} \right| \cos 60° - a^n_{от} \cos 30° =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{16}\right) = -1{,}59 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{аб}$ в момент времени $t_1 = 1$ с:

$$a_{аб} = \sqrt{a^2_{абx} + a^2_{абy} + a^2_{абz}} = 3{,}23 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v_{аб} = 0{,}93$ м/с, $a_{аб} = 3{,}23$ м/с^2.

ДИНАМИКА

Задача Д1

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость v_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0—Д1.9, табл. Д1). На участке AB на груз, кроме силы тяжести, действуют постоянная сила $\overline{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от скорости $\overline{v}$ груза (направлена против движения).

В точке B груз, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него, кроме силы тяжести, действует переменная сила F, проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т. е. $x = f(t)$, где $x = BD$. Трением груза о трубу пренебречь.

Указания. Задача Д1 — на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB, учтя начальные условия. Затем, зная время движения на участке AB или его длину, определить, какую скорость будет иметь груз в точке B. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке B, и полагая, что в этот момент $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке AB в случае, когда задана длина l участка, целесообразно перейти в уравнении к переменному x, учтя, что

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

Таблица Д1

Номер условия	m, кг	v_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t, с	F_x, Н
0	2,4	12	5	$0,8\ v^2$	1,5	—	$4 \sin(4t)$
1	2	20	6	$0,4\ v$	—	2,5	$-5 \cos(4t)$
2	8	10	16	$0,5\ v^2$	4	—	$6t^2$
3	1,8	24	5	$0,3\ v$	—	2	$-2 \cos(2t)$
4	6	15	12	$0,6\ v^2$	5	—	$-5 \sin(2t)$
5	4,5	22	9	$0,5\ v$	—	3	$3t$
6	4	12	10	$0,8\ v^2$	2,5	—	$6 \cos(4t)$
7	1,6	18	4	$0,4\ v$	—	2	$-3 \sin(4t)$
8	4,8	10	10	$0,2\ v^2$	4	—	$4 \cos(2t)$
9	3	22	9	$0,5\ v$	—	3	$4 \sin(2t)$

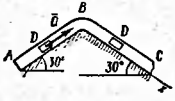

Рис. Д1.0

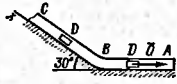

Рис. Д1.1

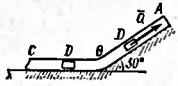

Рис. Д1.2

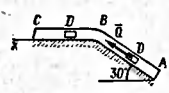

Рис. Д1.3

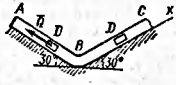

Рис. Д1.4

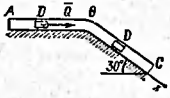

Рис. Д1.5

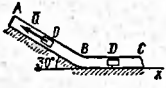

Рис. Д1.6

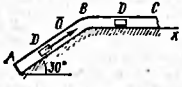

Рис. Д1.7

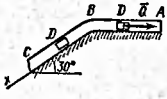

Рис. Д1.8

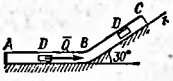

Рис. Д1.9

Пример Д1. На вертикальном участке AB трубы (рис. Д1) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления R; движение от точки A, где $v_0 = 0$, до точки B длится t_1 с. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: $m = 8$ кг, $R = \mu v^2$, где $\mu = 0{,}2$ кг/м, $v_0 = 0$, $t_1 = 2$ с, $F_x = 16 \sin(4t)$.

Определить: $x = f(t)$ — закон движения груза на участке BC.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\vec{P} = m\vec{g}$ и $\vec{R}$. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

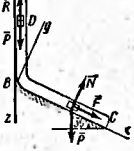

Рис. Д1

$$m\frac{dv_z}{dt} = \sum F_{kz} \text{ или } m\frac{dv_z}{dt} = P_z + R_z. \qquad (1)$$

Далее находим: $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu v^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $v_z = v$, получим

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \mu v^2 \text{ или } \frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - v^2\right). \qquad (2)$$

Введем для сокращения записей обозначение

$$n^2 = \frac{mg}{\mu} = 400 \quad (n = 20 \text{ м/с}), \qquad (3)$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м/с². Тогда, разделяя в уравнении (2) переменные и беря затем от обеих частей равенства интегралы, получим

$$\frac{dv}{n^2 - v^2} = \frac{\mu}{m}dt \text{ и } \frac{1}{2n}\ln\frac{n+v}{n-v} = \frac{\mu}{m}t + C_1. \qquad (4)$$

По начальным условиям при $t = 0$ $v = v_0 = 0$, что дает $C_1 = (1/2n)\cdot\ln 1 = 0$. Введя еще одно обозначение

$$k = n\frac{\mu}{m} = 0{,}5 \text{ с}^{-1}, \qquad (5)$$

получим из (4)

$$\ln\frac{n+v}{n-v} = 2kt \text{ и } \frac{n+v}{n-v} = e^{2kt}.$$

Отсюда находим, что

$$v = n\frac{e^{2kt} - 1}{e^{2kt} + 1}. \qquad (6)$$

Полагая здесь $t = t_1 = 2$ с и заменяя n и k их значениями (3) и (5), определим скорость v_B груза в точке B (число $e = 2{,}7$):

$$v_B = 20\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = 15{,}2 \text{ м/с}. \qquad (7)$$

2. Теперь рассмотрим движение груза на участке BC; найденная скорость v_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($v_0 = v_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}$.

Проведем из точки B ось Bx и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_x. \tag{8}$$

Так как $P_x = P\sin 30° = 0{,}5\ mg$, $N_x = 0$, $F_x = 16\sin(4t)$, уравнение (8) примет вид

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0{,}5mg + 16\sin(4t). \tag{9}$$

Разделив обе части равенства на $m = 8$ кг и полагая опять $g \approx 10$ м/с², получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 5 + 2\sin(4t). \tag{10}$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем

$$v_x = 5t - 0{,}5\cos(4t) + C_2. \tag{11}$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $v = v_0 = v_B$, где v_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = v_B + 0{,}5\cos 0 = 15{,}2 + 0{,}5 = 15{,}7.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 5t - 0{,}5\cos(4t) + 15{,}7. \tag{12}$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 2{,}5t^2 - 0{,}13\sin(4t) + 15{,}7t + C_3. \tag{13}$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 2{,}5t^2 + 15{,}7t - 0{,}13\sin(4t), \tag{14}$$

где x — в метрах, t — в секундах.

Задача Д2

Груз I массой m укреплен на пружинной подвеске в лифте (рис. Д2.0 — — Д2.9, табл. Д2). Лифт движется вертикально по закону

$$\xi = \frac{1}{2}a_1t^2 + a_2\sin(\omega t) + a_3\cos(\omega t)$$

(ось ξ направлена по вертикали вверх; ξ выражено в метрах, t — в секундах). На груз действует сила сопротивления среды $R = \mu v$, где v — скорость груза по отношению к лифту.

Найти закон движения груза по отношению к лифту, т. е. $x = f(t)$; начало координат поместить в положения статического равновесия груза при неподвижном лифте (во избежание ошибок в знаках направить ось x в сторону удлинения пружины, а груз изобразить в положении, при котором $x > 0$ и пружина растянута). При подсчетах можно принять $g \approx 10$ м/с². Массой пружин и соединительной планки 2 пренебречь.

В таблице обозначено: c_1, c_2, c_3 — коэффициенты жесткости пружин, λ_0 — удлинение пружины с эквивалентной жесткостью в начальный момент времени $t_0 = 0$, v_0 — начальная скорость груза по отношению к лифту (направлена вертикально вверх). Прочерк в столбцах c_1, c_2, c_3 означает, что соответствующая пружина отсутствует и на чертеже изображаться не должна. Если при этом конец одной из оставшихся пружин окажется свободным, его следует прикрепить в соответствующем месте или к грузу или к потолку (полу) лифта; то же следует сделать, если свободными окажутся соединенные плашкой 2 концы обеих оставшихся пружин. Условие $\mu = 0$ означает, что сила сопротивления R отсутствует.

Указания. Задача Д2 охватывает одновременно темы относительное движение и колебания материальной точки. Сначала нужно составить дифференциальное уравнение относительного движения (по отношению к лифту) рассматриваемого в задаче груза, для чего присоединить к действующим силам переносную силу инерции. При этом заменить подвеску одной пружиной с жесткостью, эквивалентной жесткости подвески. Затем проинтегрировать полученное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, учтя начальные условия.

Таблица Д2

Номер условия	m, кг	c_1, Н/м	c_2, Н/м	c_3, Н/м	a_1, м/с²	a_2, м	a_3, м	ω, 1/с	μ, Н·с/м	λ_0, м	v_0, м/с
0	0,5	80	—	120	$0,5g$	0	0	—	6	0	4
1	2,5	500	500	—	0	0	0,6	5	0	0	3
2	1	—	160	240	0	0,5	0	6	0	0,15	0
3	0,8	120	240	—	$-0,5g$	0	0	—	8	0	2
4	1	150	—	300	0	0	0,1	15	0	0	0
5	0,4	50	200	—	0	0,2	0	20	0	0	0
6	1	—	300	200	g	0	0	—	20	0,15	0
7	2	400	—	400	0	0,1	0	16	0	0	0
8	0,4	—	60	120	$-g$	0	0	—	4	0,1	0
9	0,5	180	120	—	0	0	0,1	20	0	0	0

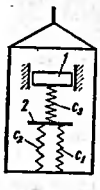

Рис. Д2.0

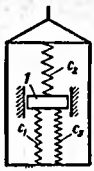

Рис. Д2.1

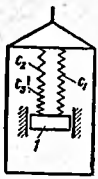

Рис. Д2.2

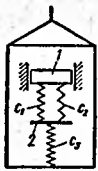

Рис. Д2.3

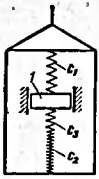

Рис. Д2.4

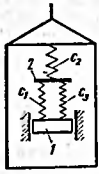

Рис. Д2.5

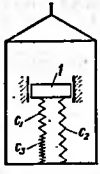

Рис. Д2.6

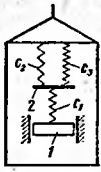

Рис. Д2.7

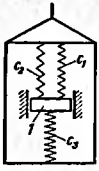

Рис. Д2.8

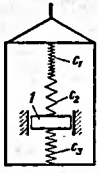

Рис. Д2.9

Пример Д2. Груз D массой m, прикрепленный к двум последовательно соединенным пружинам с коэффициентами жесткости c_1 и c_2, перемещается по пазу AB призматической тележки (рис. Д2, *а*). Тележка движется по закону $\xi = f(t)$. Начальное удлинение пружины с эквивалентной жесткостью равно λ_0, а начальная скорость груза по отношению к тележке v_0 (направлена от D к B).

Дано: $m = 0{,}4$ кг, $c_1 = 200$ Н/м, $c_2 = 50$ Н/м, $\lambda_0 = 0{,}1$ м, $v_0 = 1$ м/с, $\alpha = 60°$,

$$\xi = 2t^2 + 0{,}4 \sin(4t) \qquad (1)$$

(ξ — в метрах, t — в секундах).

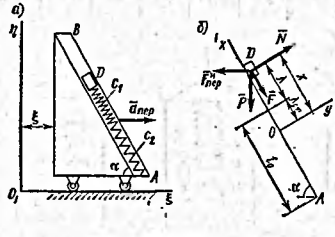

Рис. Д2

Определить: $x = f(t)$ — закон движения груза по отношению к тележке.

Решение. 1. Заменим прикрепленные к грузу пружины одной эквивалентной пружиной с коэффициентом жесткости $c_{эк} = c$. Значение c здесь определяется из условия, что при равновесии под действием какой-нибудь приложенной к свободному концу пружин силы Q усилия в любом поперечном сечении пружин будут одинаковыми и равными Q. Тогда, если удлинения пружин равны соответственно λ_1 и λ_2, то удлинение эквивалентной

пружины $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ и должно быть $c_1\lambda_1 = c_2\lambda_2 = c\lambda = Q$, откуда $\lambda_1 = Q/c_1$, $\lambda_2 = Q/c_2$, $\lambda = Q/c$. Но так как $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, то

$$\frac{Q}{c} = \frac{Q}{c_1} + \frac{Q}{c_2} \text{ и } c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 40 \text{ Н/м}. \quad (2)$$

2. Составим теперь дифференциальное уравнение относительного движения груза (по отношению к тележке). Сначала заметим, что при неподвижной тележке в положении статического равновесия груза эквивалентная пружина (длину ее в недеформированном состоянии обозначим l_0) под действием силы тяжести $\overline{P}$ будет сжата на величину $\lambda_{ст}$ (рис. Д2, *б*). Из условия равновесия следует, что

$$c\lambda_{ст} = P\sin\alpha \text{ и } \lambda_{ст} = \frac{mg\sin\alpha}{c} = 0{,}08 \text{ м}. \quad (3)$$

Свяжем тогда с тележкой подвижную систему отсчета Oxy, начало O которой поместим в положении статического равновесия груза, а ось Ox направим вдоль паза AB в сторону удлинения пружины (рис. Д2, *б*). Рассмотрим груз в положении, при котором $x > 0$ и пружина растянута; изобразим действующие на груз силы: силу тяжести $\overline{P}$, силу упругости $\overline{F}$ и реакцию паза $\overline{N}$. Для составления уравнения относительного движения груза присоединим к этим силам переносную силу инерции $\overline{F}^и_{пер} = -m\overline{a}_{пер}$; кориолисова сила инерции здесь равна нулю, так как переносное движение (движение тележки) является поступательным. Тогда уравнение относительного движения в векторной форме будет иметь вид

$$m\overline{a}_{от} = \overline{P} + \overline{F} + \overline{N} + \overline{F}^и_{пер}.$$

Проектируя обе его части на ось x, получим

$$m\ddot{x} = -P\sin\alpha - F + F^и_{пер}\cos\alpha. \quad (4)$$

Найдем значения F и $F^и_{пер}$. Так как при положении груза, определяемом координатой x (рис. Д2, *б*), эквивалентная пружина имеет удлинение $\lambda = x - \lambda_{ст}$, то $F = c\lambda = c(x - \lambda_{ст})$. Далее $F^и_{пер} = ma_{пер} = m\ddot{\xi}$, где $\ddot{\xi}$ — ускорение тележки. Из равенства (1) находим, что $\ddot{\xi} = 4 - 6{,}4\sin(4t)$. Кроме того, $\cos\alpha = 0{,}5$. Подставляя все эти величины в уравнение (4), получим

$$m\ddot{x} = -P\sin\alpha - c(x - \lambda_{ст}) + m[2 - 3{,}2\sin(4t)].$$

Согласно равенству (3) члены $-P\sin\alpha$ и $c\lambda_{ст}$ в правой части сокращаются и окончательно дифференциальное уравнение относительного движения груза будет иметь вид

$$\ddot{x} + k^2x = b_1 + b_2\sin(4t), \quad (5)$$

где обозначено:

$$k^2 = \frac{c}{m} = 100 \text{ с}^{-2},\ b_1 = 2 \text{ м/с}^2,\ b_2 = -3{,}2 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

3. Для определения закона движения груза надо проинтегрировать уравнение (5). Его общим решением, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет

$$x = x_1 + x_2, \quad (7)$$

где x_1 — общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2x = 0$, т. е.

$$x_1 = C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt), \quad (8)$$

а x_2 — частное решение уравнения (5). Учитывая, каковы правая и левая части этого уравнения, ищем x_2 в виде

$$x_2 = A + B\sin(4t). \qquad (9)$$

Для определения постоянных A и B находим $\ddot{x}_2 = -16B\sin(4t)$, подставляем значения $\ddot{x}_2$ и x_2 в уравнение (5) и приравняем в его обеих частях свободные члены и коэффициенты при $\sin(4t)$. В результате, принимая во внимание обозначения (6), получим:

$$A = \frac{b_1}{k^2} = 0{,}02 \text{ м}, \quad B = \frac{b_2}{k^2 - 16} = -0{,}04 \text{ м}.$$

Тогда из равенств (7) — (9), учитывая, что $k = 10\text{с}^{-1}$, получим следующее общее решение уравнения (5):

$$x = C_1\sin(10t) + C_2\cos(10t) - 0{,}04\sin(4t) + 0{,}02. \qquad (10)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем еще $v_x = \dot{x}$:

$$v_x = 10C_1\cos(10t) - 10C_2\sin(10t) - 0{,}16\cos(4t). \qquad (11)$$

По условиям задачи при $t = 0$ $v_x = v_0 = 1$ м/с, $\lambda = \lambda_0 = 0{,}1$ м.

Тогда, как видно из рис. Д2, *б* и равенства (3), $x_0 = \lambda_0 + \lambda_{ст} = 0{,}18$ м. Подставив эти начальные данные в уравнения (10) и (11), найдем из них, что $C_1 = 0{,}12$, $C_2 = 0{,}16$. В результате уравнение (10) примет окончательно вид

$$x = 0{,}12\sin(10t) + 0{,}16\cos(10t) - 0{,}04\sin(4t) + 0{,}02. \qquad (12)$$

Это уравнение и определяет искомый закон относительного движения груза, т. е. закон совершаемых им колебаний.

Примечания: 1. Если груз был бы прикреплен к двум параллельным пружинам, то при равновесии под действием некоторой силы $\overline{Q}$ каждая из пружин и эквивалентная пружина имели бы одно и то же удлинение λ. Тогда для двух пружин $c_1\lambda + c_2\lambda = Q$, а для эквивалентной пружины $c\lambda = Q$; отсюда и определяется значение $c_{эк} = c = c_1 + c_2$.

2. Если пружины были бы прикреплены к тележке в точке B (рис. Д2, *а*), а груз D находился на другом их конце, то в положении статического равновесия эквивалентная пружина была бы растянута на величину $\lambda_{ст}$, а не сжата, что следует учесть при изображении схемы, подобной показанной на рис. Д2,*б*, и при определении зависимости между x, λ и $\lambda_{ст}$ (в этом случае будет $\lambda = x + \lambda_{ст}$).

Задача Д3

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты I массой $m_1 = 24$ кг и груза D массой $m_2 = 8$ кг; плита или движется вдоль горизонтальных направляющих (рис. Д3.0 — Д3.4), или вращается вокруг вертикальной оси z, лежащей в плоскости плиты (рис. Д3.5 — Д3.9). В момент времени $t_0 = 0$ груз начинает двигаться под действием внутренних сил по имеющемуся на плите желобу; закон его движения $s = AD = F(t)$ задан в табл. Д3, где s выражено в метрах, t — в секундах. Форма желоба на рис. 0, 1, 8, 9 — прямолинейная (желоб KE), на рис. 2 — 7 — окружность радиуса $R = 0{,}8$ м с центром в центре масс C_1 плиты ($s = \overset{\frown}{AD}$ на рис. 2 — 7 отсчитывается по дуге окружности).

Плита, изображенная на рис. 0 — 4, имеет в момент $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$.

Плита, изображенная на рис. 5 — 9, имеет в момент времени $t_0 = 0$ угловую скорость $\omega_0 = 8\ \text{с}^{-1}$, и в этот момент на нее начинает действовать вра-

щающий момент M (момент относительно оси z), заданный в таблице в ньютонометрах и направленный как ω_0 при $M > 0$ и в противоположную сторону при $M < 0$. Ось z проходит от центра C_1 плиты на расстоянии b; размеры плиты показаны на рисунках.

Считая груз материальной точкой и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить указанное в таблице в столбцах 4 и 9, где обозначено: в столбце 4 (относится к рис. 0—4) x_1 — перемещение плиты за время от $t_0 = 0$ до $t_1 = 1$ с, u_1 — скорость плиты в момент времени $t_1 = 1$ с, N_1 — полная сила нормального давления плиты на направляющие в момент времени $t_1 = 1$ с (указать, куда сила N_1 направлена); в столбце 9 (относится к рис. 5—9) ω_1 — угловая скорость плиты в момент времени $t_1 = 1$ с, $\omega = f(t)$ — угловая скорость плиты как функция времени.

На всех рисунках груз показан в положении, при котором $s = AD > 0$; при $s < 0$ груз находится по другую сторону от точки A.

Указания. Задача Д3 — на применение теорем о движении центра масс и об изменении количества движения и кинетического момента системы. Теоремой о движении центра масс целесообразно воспользоваться в задаче, где нужно определить поступательное перемещение одного из тел системы (или реакцию связи), а теоремой об изменении количества движения — когда нужно определить скорость такого тела. Теорема об изменении кинетического момента применяется в задачах, где нужно найти угловую скорость или закон вращения одного из тел системы.

При решении задачи учесть, что абсолютная скорость $\bar{v}$ груза слагается из относительной $\bar{v}_{от}$ и переносной $\bar{v}_{пер}$ скоростей (определяются так же, как при решении задачи К3), т. е. $\bar{v} = \bar{v}_{от} + \bar{v}_{пер}$. Тогда количество движения груза $m\bar{v} = m\bar{v}_{от} + m\bar{v}_{пер}$, а момент $m\bar{v}$ относительно оси z по теореме Вариньона (статика) будет $m_z(m\bar{v}) = m_z(m\bar{v}_{от}) + m_z(m\bar{v}_{пер})$; эти моменты вычисляются так же, как моменты силы.

Конкретное ход решения разъяснен в примерах Д3.

Момент инерции плиты относительно оси C_1z', направленной так же, как ось z на рис. 5—9, но проходящей через центр масс C_1 плиты, равняется $\frac{m_1 l^2}{12}$, где l — ширина плиты (в задаче $l = 3R$ или $l = 4R$). Для определения момента инерции I_z относительно оси z воспользоваться теоремой Гюйгенса о моментах инерции относительно параллельных осей. Ось z при изображении чертежа провести на том расстоянии b от центра C_1, которое указано в таблице.

Таблица Д3

Номер условия	Рис. 0 и 1	Рис. 2—4	Рис. 0—4	Рис. 5—7	Рис. 8 и 9	Рис. 5—9		
	$s = F(t)$	$\breve{s} = F(t)$	Найти	$\breve{s} = F(t)$	$s = F(t)$	b	M	Найти
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$0{,}6 \sin\left(\frac{\pi}{3} t^2\right)$	$\frac{\pi R}{3}(t^2 - 3)$	x_1	$\frac{\pi R}{2}(1 - 2t)$	$0{,}4 \sin(\pi t)$	$\frac{R}{2}$	8	$\omega = f(t)$
1	$0{,}4(1 - 3t^2)$	$\frac{\pi R}{3}(3 - 2t^2)$	u_1	$\frac{\pi R}{6}(1 + 2t^2)$	$0{,}2(2 - 3t)$	$\frac{4R}{3}$	0	ω_1
2	$0{,}4 \sin(\pi t^2)$	$\frac{\pi R}{2} t^2$	N_1	$\frac{\pi R}{2} t^2$	$-0{,}8t$	R	$12t^2$	$\omega = f(t)$

Номер условия	Рис. 0 и 1	Рис. 2—4	Найти	Рис. 0—4	Рис. 5—7	Рис. 8 и 9	Рис. 5—9		
	$s=F(t)$	$\breve{s}=F(t)$			$\breve{s}=F(t)$	$s=F(t)$	b	M	Найти
1	2	3	4		5	6	7	8	9
3	$0{,}8\cos\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)$	$\frac{\pi R}{6}t^3$	u_1		$\frac{\pi R}{3}(4t^2-1)$	$0{,}2(2-5t)$	$\frac{4R}{3}$	0	ω_1
4	$0{,}3(1-3t^2)$	$\frac{\pi R}{6}(2t^2-3)$	x_1		$\frac{\pi R}{6}(5-7t)$	$0{,}4(3t-1)$	$\frac{R}{2}$	0	ω_1
5	$0{,}8\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	$\frac{\pi R}{2}(t^2-1)$	N_1		$\frac{\pi R}{3}(2t^2-3)$	$0{,}6\cos(\pi t)$	R	—12	$\omega=f(t)$
6	$0{,}6t^2$	$\frac{\pi R}{3}t^2$	u_1		$\frac{\pi R}{6}(3-4t^2)$	$0{,}8(1-t^2)$	$\frac{R}{2}$	0	ω_1
7	$0{,}4(2t^2-1)$	$\frac{\pi R}{6}(3-5t^2)$	x_1		$\frac{\pi R}{3}(3t-t^2)$	$0{,}8(5t^2-2)$	$\frac{4R}{3}$	0	ω_1
8	$0{,}6\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	πRt^2	N_1		$\frac{\pi R}{6}(2t-3)$	$0{,}4t^2$	$\frac{R}{2}$	—8	$\omega=f(t)$
9	$1{,}2\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	$\frac{\pi R}{4}t^2$	x_1		$\frac{\pi R}{3}(3-5t^2)$	$0{,}6(t-2t^2)$	$\frac{4R}{3}$	0	ω_1

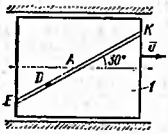

Рис. Д3.0

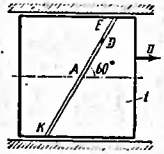

Рис. Д3.1

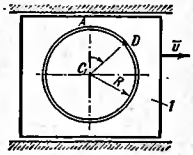

Рис. Д3.2

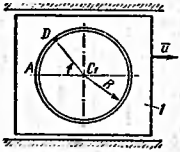

Рис. Д3.3

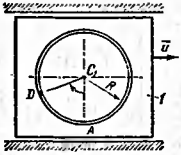

Рис. Д3.4

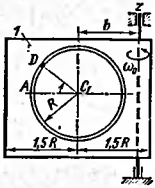

Рис. Д3.5

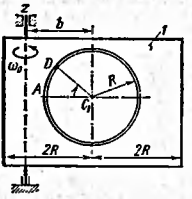

Рис. Д3.6

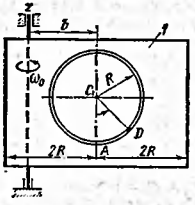

Рис. Д3.7

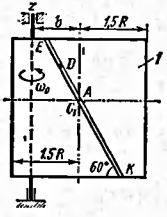

Рис. Д3.8

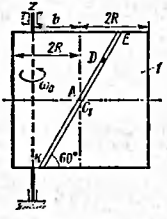

Рис. Д3.9

Пример Д3. К вертикальной плите 1 массой m_1 с помощью невесомого стержня BD длиной l прикреплен груз D массой m_2 (рис. Д3а). В момент времени $t_0 = 0$ стержень начинает вращаться вокруг точки B так, что расстояние $s = \overset{\smile}{AD}$ изменяется по закону $s = F(t)$, где s — в метрах, t — в секундах.

Плита движется по горизонтальным направляющим и при $t_0 = 0$ ее скорость $u = u_0$.

Дано: $m_1 = 12$ кг, $m_2 = 6$ кг, $l = 0{,}8$ м, $t_1 = 2$ с.

$$u_0 = 0, \quad s = \frac{\pi l}{6}(3 - t^2). \qquad (1)$$

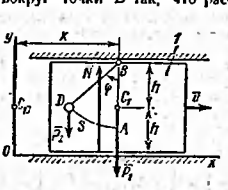

Рис. Д3а

1. Определение перемещения x_1 плиты за время от $t = 0$ до $t = t_1$.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и груза. Изобразим действующие на нее внешние силы: силы тяжести $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$ и суммарную реакцию $\overline{N}$ направляющих. Проведем координатные оси xy так, чтобы ось y прошла через начальное положение центра масс плиты. Для определения x_1 воспользуемся теоремой о движении центра масс C системы и составим

дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось x, обозначая массу системы через m:

$$m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx}, \text{ или } m\ddot{x}_C = 0, \text{ так как}$$

$$\sum F^e_{kx} = P_{1x} + P_{2x} + N_x = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$m\dot{x}_C = C_1, \; mx_C = C_1 t + C_2, \tag{2}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Из формулы, определяющей абсциссу x_C центра масс, следует, что для рассматриваемой системы $mx_C = m_1 x + m_2 x_D$, где x — абсцисса центра масс плиты, определяющая одновременно ее положение, x_D — абсцисса груза D. Из рис. Д3а видно, что $x_D = x - l\sin\varphi$, где

$$\varphi = \frac{s}{l} = \frac{\pi}{6}(3 - t^2) \text{ и } \sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t^2}{6}\right) = \cos\frac{\pi t^2}{6}. \tag{3}$$

В результате, найдя значение mx_C и подставив его в (2), получим

$$(m_1 + m_2)\, x - m_2 l \cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) = C_1 t + C_2. \tag{4}$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 понадобится еще одно уравнение, которое получим, продифференцировав обе части равенства (4) по времени; это даст:

$$(m_1 + m_2)\,\dot{x} + \frac{\pi t}{3} m_2 l \sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) = C_1, \tag{5}$$

где $\dot{x} = u$ — скорость плиты. По начальным условиям при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = u_0 = 0$. Подставив эти величины в равенства (5) и (4), получим $C_1 = 0$, $C_2 = -m_2 l$. При найденных значениях C_1 и C_2 из равенства (4) будем окончательно иметь

$$x = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)\right].$$

Этот результат дает зависимость x от t. Полагая здесь $t = t_1 = 2$ с, найдем искомое перемещение x_1. Ответ: $x_1 = -0{,}4$ м (плита переместится влево).

2. Определение скорости u_1. При тех же условиях (1) найдем скорость u_1 плиты в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассматриваем опять механическую систему, состоящую из плиты и груза, и изображаем действующие на нее внешние силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ и реакцию $\bar{N}$; проводим оси xy (рис. Д3б). Для определения u_1 воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы, учитывая, что для рассматриваемой системы $\bar{Q} = \bar{Q}^{пл} + \bar{Q}^D$, где $\bar{Q}^{пл} = m_1\bar{u}$ и $\bar{Q}^D = m_2\bar{v}_D$ — количества движения плиты и груза соответственно. Составляя уравнение в проекции на ось x, получим

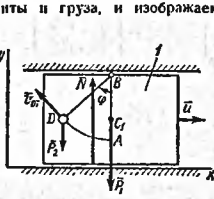

Рис. Д3б

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F^e_{kx} \text{ или } \frac{dQ_x}{dt} = 0, \text{ так как}$$

$$\sum F^e_{kx} = P_{1x} + P_{2x} + N_x = 0.$$

Отсюда следует, что $Q_x = Q_x^{пл} + Q_x^D = C_1$ или

$$m_1 u_x + m_2 v_{Dx} = C_1. \qquad (6)$$

Для определения v_{Dx} рассмотрим движение груза как сложное, считая его движение по отношению к плите относительным, а движение самой плиты — переносным движением. Тогда $\overline{v}_D = \overline{v}_{пер} + \overline{v}_{от}$, где численно $v_{пер} = u$ и $v_{от} = \dot{s}$. Покажем вектор $\overline{v}_{от}$ на рис. Д3б, направив его перпендикулярно OD в сторону положительного отсчета s или φ, и определим проекцию вектора $\overline{v}_D$ на ось x; получим $v_{Dx} = u_x - v_{от}\cos\varphi$, где

$$\varphi = \frac{s}{l} = \frac{\pi}{6}(3 - t^2) \text{ и } \cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t^2}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right). \qquad (7)$$

В данной задаче v_{Dx} можно еще найти, определив абсциссу точки D, т. е. $x_D = x - l\sin\varphi$ (рис. Д3а); тогда $v_{Dx} = \dot{x}_D = \dot{x} - l\dot{\varphi}\cos\varphi$, где $\dot{x} = u_x$, $l\dot{\varphi} = \dot{s}$, а значение $\cos\varphi$ дает равенство (7).

При найденном значении v_{Dx} равенство (6), если учесть, что $u_x = u$, а $v_{от} = \dot{s} = -\frac{\pi l}{3}t$, примет вид

$$(m_1 + m_2)u + m_2\frac{\pi l}{3}t\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) = C_1. \qquad (8)$$

По начальным условиям при $t = 0$ $u = 0$, что дает $C_1 = 0$, и окончательно из (8) находим

$$u = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{\pi l}{3}t\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right).$$

Этот результат определяет зависимость u от t. Полагая здесь $t = t_1 = 2$с, найдем искомую скорость u_1. Ответ: $u_1 = -0{,}48$ м/с (скорость направлена влево).

3. Определение реакции N_1. При тех же условиях (1) найдем реакцию N_1 направляющих в момент времени $t_1 = 2$с.

Решение. Опять рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и груза D, и изобразим действующие на нее внешние силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и реакцию $\overline{N}$ (рис. Д3а). Для определения N_1 воспользуемся теоремой о движении центра масс системы и составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось y:

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e \text{ или } m\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2, \qquad (9)$$

где m — масса системы, $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$. Из формулы, определяющей ординату y_C центра масс системы, следует, что для рассматриваемой системы $my_C = m_1 y_{C1} + m_2 y_D$, где, как видно из рис. Д3а, $y_{C1} = h$, $y_D = 2h - l\cos\varphi$. Тогда, используя равенство (7), получим

$$my_C = m_1 h + 2m_2 h - m_2 l\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right).$$

Вычисляя производные и учитывая, что $h = \text{const}$, получим

$$m\dot{y}_C = -\frac{\pi}{3}m_2 l t\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right),$$

$$m\ddot{y}_C = -\frac{\pi}{3} m_2 l \cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) + \frac{\pi^2}{9} m_2 l t^2 \sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right).$$

Подставив это значение $m\ddot{y}_C$ в равенство (9), найдем зависимость N от t и из нее, полагая $t = t_1 = 2$с, определим искомую величину N_1. Ответ: $N_1 = 197{,}3$Н.

4. Определение угловой скорости ω. Плита вращается вокруг оси z, лежащей в плоскости плиты (рис. Д3в), и в момент времени $t_0 = 0$, когда угловая скорость плиты ω_0, на нее начинает действовать вращающий момент M.

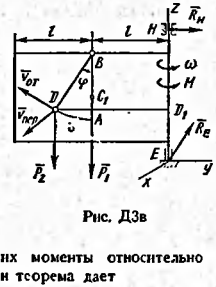

Рис. Д3в

Дано дополнительно к условиям (1): $\omega_0 = 5$ с$^{-1}$, $M = kt$, где $k = 10$ Н · м/с.

Определить: $\omega = f(t)$ — зависимость угловой скорости плиты от времени.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и груза D, и изобразим действующие на нее внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, реакции $\overline{R}_E$ и $\overline{R}_H$ подпятника и подшипника и вращающий момент M. Для определения ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси z. Предварительно заметим, что так как силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ параллельны оси z, а реакции $\overline{R}_E$ и $\overline{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси z равны нулю. Тогда $\sum m_z\left(\overline{F}_k^e\right) = M = kt$ и теорема дает

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(\overline{F}_k^e\right) \text{ или } \frac{dK_z}{dt} = kt. \tag{10}$$

Умножая обе части этого уравнения на dt и интегрируя, получим

$$K_z = \frac{kt^2}{2} + C_1. \tag{11}$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{пл} + K_z^D, \tag{12}$$

где $K_z^{пл}$ и K_z^D — кинетические моменты относительно оси z плиты и груза D соответственно. Поскольку плита вращается вокруг оси z, то

$$K_z^{пл} = I_z\omega, \text{ где } I_z = \frac{m_1}{3}(2l)^2 = \frac{4}{3} m_1 l^2. \tag{13}$$

Для определения K_z^D рассмотрим движение груза как сложное, считая его движение по отношению к плите относительным, а вращение плиты вокруг оси z — переносным движением. Тогда $\overline{v}_D = \overline{v}_{от} + \overline{v}_{пер}$ и по теореме Вариньона

$$K_z^D = m_z(m_2\overline{v}_D) = m_z(m_2\overline{v}_{от}) + m_z(m_2\overline{v}_{пер}). \tag{14}$$

Но вектор $\overline{v}_{от}$ лежит в одной плоскости с осью z и, следовательно, $m_z(m_2\overline{v}_{от}) = 0$. Вектор $\overline{v}_{пер}$ направлен перпендикулярно плите (как ось x, если ось y в плоскости плиты); по модулю $v_{пер} = \omega \cdot DD_1$. Тогда $m_z(m_2\overline{v}_{пер}) = m_2 v_{пер} \cdot DD_1 = m_2\omega(DD_1)^2$. Но из рис. Д3в видно, что $DD_1 = l + l\sin\varphi$.

Взяв значение $\sin\varphi$ из формулы (3) и подставив все найденные величины в равенство (14), получим

$$K_x^D = m_2\omega\,(DD_1)^2 = m_2\omega l^2\left(1+\cos\frac{\pi t^2}{6}\right)^2. \qquad (15)$$

Зная $K_x^{пл}$ и K_x^D [формулы (13) и (15)], найдем из равенства (12) значение K_x, и тогда уравнение (11) примет вид

$$\left[\frac{4}{3}\,m_1 + m_2\left(1+\cos\frac{\pi t^2}{6}\right)^2\right] l^2\omega = \frac{kt^2}{2} + C_1,$$

или при числовых значениях задачи

$$0{,}64\left[16 + 6\left(1+\cos\frac{\pi t^2}{6}\right)^2\right]\omega = 5t^2 + C_1. \qquad (16)$$

Постоянную интегрирования определим по начальным условиям: при $t=0$ $\omega=\omega_0=5\text{с}^{-1}$; получим $C_1=128$. При этом значении C_1 из уравнения (16) находим искомую зависимость ω от t. Ответ:

$$\omega = \frac{128+5t^2}{0{,}64\left[16+6\left(1+\cos\frac{\pi t^2}{6}\right)^2\right]}$$

Примечание. Из полученного результата можно найти и значение ω_1 при $t=t_1$. Но если по условиям задачи одновременно $M=0$, то уравнение (10) дает $K_x=\text{const}$, и тогда обычно проще не искать зависимость ω от t в общем виде, а сначала определить положение груза D при $t=0$ (т.е. угол φ_0) и вычислить значение K_{x0} при $\varphi=\varphi_0$ и $\omega=\omega_0$ с помощью равенств, аналогичных (11)—(15); затем определить положение груза при $t=t_1$ (угол φ_1) и тем же путем найти K_{x1} при $\varphi=\varphi_1$ и $\omega=\omega_1$.

Так, в рассмотренном примере при $t=0$ будет $\varphi_0=\pi/2$ и $DD_1=2l$ (рис. Д3в), а при $t=t_1=2$с будет $\varphi_1=-\pi/6$ и $DD_1={}^l/_2$. Тогда

$$K_{x0} = \left(\frac{4}{3}\,m_1 l^2 + m_2 4l^2\right)\omega_0,\quad K_{x1} = \left(\frac{4}{3}m_1 l^2 + m_2\frac{l^2}{4}\right)\omega_1.$$

Значение ω_1 находится из равенства $K_{x1}=K_{x0}$.

Задача Д4

Механическая система состоит из грузов *1* и *2* (коэффициент трения грузов о плоскость $f=0{,}1$), цилиндрического сплошного однородного катка *3* и ступенчатых шкивов *4* и *5* с радиусами ступеней $R_4=0{,}3$ м, $r_4=0{,}1$ м, $R_5=0{,}2$ м, $r_5=0{,}1$ м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу) (рис. Д4.0 — Д4.9, табл. Д4). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

Под действием силы $F=f(s)$, зависящей от перемещения s точки приложения силы, система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы *4* и *5* действуют постоянные моменты сил сопротивлений, равные соответственно M_4 и M_5.

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы F равно s_1. Искомая величина указана в столбце „Найти" таблицы, где обозначено: v_1 — скорость груза *1*, v_{C3} — скорость центра масс катка *3*, ω_4 — угловая скорость тела *4* и т. д.

Указания. Задача Д4 — на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия

системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении кинетической энергии катка, движущегося плоскопараллельно, для установления зависимости между его угловой скоростью и скоростью его центра масс воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей (кинематика). При определении работы все перемещения следует выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Когда по данным таблицы $m_2 = 0$, груз *2* на чертеже не изображать; шкивы *4* и *5* всегда входят в систему.

Таблица Д4

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	M_1, Н · м	M_2, Н · м	$F = f(s)$, Н	s_1, м	Найти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	$50(2+3s)$	1,0	v_1
1	6	0	2	0	8	0,6	0	$20(5+2s)$	1,2	ω_5
2	0	4	6	8	0	0	0,4	$80(3+4s)$	0,8	v_{C_4}
3	0	2	4	0	10	0,3	0	$40(4+5s)$	0,6	v_2
4	8	0	2	6	0	0	0,6	$30(3+2s)$	1,4	ω_4
5	8	0	4	0	6	0,9	0	$40(3+5s)$	1,6	v_1
6	0	6	2	8	0	0	0,8	$60(2+5s)$	1,0	ω_4
7	0	4	6	0	10	0,6	0	$30(8+3s)$	0,8	ω_5
8	6	0	4	0	8	0,3	0	$40(2+5s)$	1,6	v_{C_4}
9	0	4	6	10	0	0	0,4	$50(3+2s)$	1,4	v_2

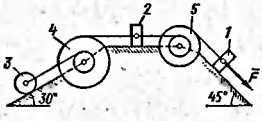

Рис. Д4.0

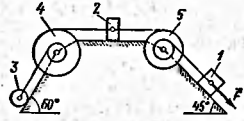

Рис. Д4.1

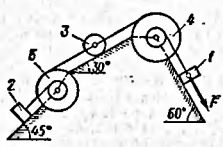

Рис. Д4.2

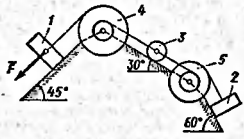

Рис. Д4.3

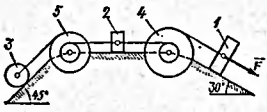

Рис. Д4.4

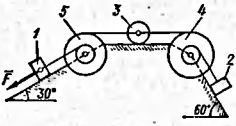

Рис. Д4.5

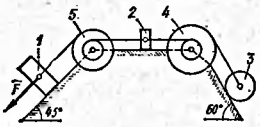

Рис. Д4.6

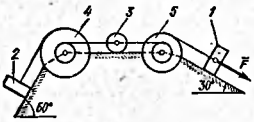

Рис. Д4.7

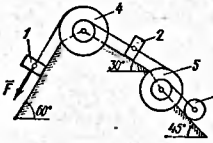

Рис. Д4.8

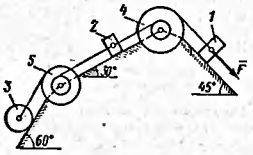

Рис. Д4.9

Пример Д4. Механическая система (рис. Д4) состоит из сплошного цилиндрического катка *1*, ступенчатого шкива *2* с радиусами ступеней R_2 и r_2 (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза *3* (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив *2*.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив *2* действует постоянный момент M_2 сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 8$ кг, $R_2 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}1$ м, $f = 0{,}2$, $M_2 = 0{,}6$ Н·м, $F = 2\,(1 + 2s)$ Н, $s_1 = 2$м.

Определить: скорость v_{C_1} центра масс катка, когда $s = s_1$.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тел *1, 2, 3*, соединенных нитями. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные $\overline{F}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, момент сопротивления M_2, реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$ и силы трения $\overline{F}_1^{тр}$ и $\overline{F}_3^{тр}$.

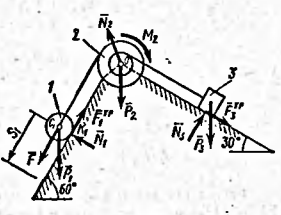

Рис. Д4

Для определения v_{C_1} воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \tag{1}$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{2}$$

Учитывая, что тело *1* движется плоскопараллельно, тело *3* — поступательно, а тело *2* вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1}\omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2\omega_2^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2. \tag{3}$$

Все входящие сюда скорости следует выразить через искомую v_{C_1}. Приняв во внимание, что точка K_1 — мгновенный центр скоростей катка *1*, и обозначив радиус катка через r_1, получим

$$\omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1}, \quad \omega_2 = \frac{v_{C1}}{R_2},$$

$$v_3 = \omega_2 r_2 = v_{C1}\frac{r_2}{R_2}. \tag{4}$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5 m_1 r_1^2, \quad I_2 = m_2 R_2^2. \tag{5}$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем используя равенство (2), получим окончательно:

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2}\right) v_{C1}^2. \tag{6}$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет путь s_1. Одновременно все перемещения следует выразить через заданную величину s_1, для чего учтем, что здесь зависимость между перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями в равенствах (4), т.е. $\varphi_2 = s_1/R_2$, $s_3 = s_1(r_2/R_2)$. В результате получим:

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 2(1 + 2s)\,ds = 2(s_1 + s_1^2),$$

$$A(\overline{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ, \quad A(M_2) = -M_2\varphi_2 = -M_2\frac{s_1}{R_2},$$

$$A(\overline{P}_3) = -P_3 s_3 \sin 30^\circ = -P_3 s_1 \frac{r_2}{R_2}\sin 30^\circ,$$

$$A(\overline{F}_3^{\text{тр}}) = -F_3^{\text{тр}} s_3 = -fN_3 s_3 = -fP_3\cos 30^\circ s_1\frac{r_2}{R_2}.$$

Работа остальных сил равна нулю, так как точка K_1, где приложены $\overline{N}_1$ и $\overline{F}_1^{\text{тр}}$ — мгновенный центр скоростей, точка O, где приложены $\overline{P}_2$ и $\overline{N}_2$,

неподвижна, а реакция $\overline{N}_3$ перпендикулярна перемещению груза *3*. Тогда окончательно

$$\sum A_k^e = 2(s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - M_2 \frac{s_1}{R_2} -$$

$$- P_3 s_1 \frac{r_3}{R_2} (\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ). \qquad (7)$$

4. Подставив выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, получим

$$\left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{r_3^2}{R_2^2}\right) v_{C1}^2 = 2(s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ -$$

$$- M_2 \frac{s_1}{R_2} - P_3 s_1 \frac{r_3}{R_2} (\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ). \qquad (8)$$

При числовых значениях, которые имеют заданные величины, равенство (8) дает:

$$9 v_{C1}^2 = 21{,}1 \text{ Н·м}.$$

Отсюда находим искомую скорость. Ответ: $v_{C_1} = 1{,}53$ м/с.

Задача Д5

Вертикальный вал *AK* (рис. Д5.0—Д5.9, табл. Д5), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 c^{-1}$, закреплен подпятником в точке *A* и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д5 в столбце 2 ($AB = BD = DE = EK = b$). К валу жестко прикреплены невесомый стержень *1* длиной $l_1 = 0{,}4$ м с точечной массой $m_1 = 6$ кг на конце и однородный стержень *2* длиной $l_2 = 0{,}6$ м, имеющий массу $m_2 = 4$ кг; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней к валу указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы α и β — в столбцах 5 и 6.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При окончательных подсчетах принять $b = 0{,}4$ м.

Указания. Задача Д5 — на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня *2*) имеют равнодействующую $\overline{R}^{и}$, то численно $R^{и} = m a_C$, где a_C — ускорение центра масс *C* стержня, но линия действия силы $\overline{R}^{и}$ в общем случае не проходит через точку *C* (см. пример Д5).

Таблица Д5

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление стержня 1 в точке	Крепление стержня 2 в точке	α°	β°	Номер условия	Подшипник в точке	Крепление стержня 1 в точке	Крепление стержня 2 в точке	α°	β°
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
0	*B*	*D*	*K*	30	45	5	*D*	*K*	*B*	30	45
1	*D*	*B*	*E*	45	60	6	*E*	*B*	*K*	45	30
2	*E*	*D*	*B*	60	75	7	*K*	*E*	*B*	60	75
3	*K*	*D*	*E*	75	30	8	*D*	*E*	*K*	75	60
4	*B*	*E*	*D*	90	60	9	*E*	*K*	*D*	90	45

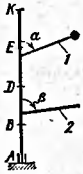

Рис. Д5.0

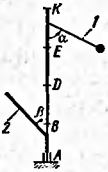

Рис. Д5.1

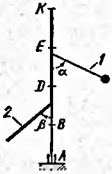

Рис. Д5.2

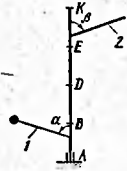

Рис. Д5.3

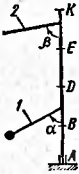

Рис. Д5.4

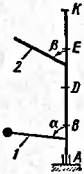

Рис. Д5.5

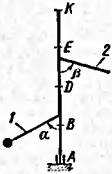

Рис. Д5.6

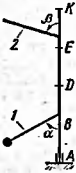

Рис.Д5.7

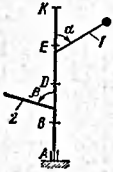

Рис. Д5.8

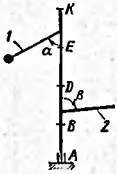

Рис. Д5.9

Пример Д5. С невесомым валом AB, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω, жестко скреплен стержень OD длиной l и массой m_1, имеющий на конце груз массой m_2 (рис. Д5).

Дано: $b_1 = 0{,}6$ м, $b_2 = 0{,}2$ м, $\alpha = 30°$, $l = 0{,}5$ м, $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $\omega = 6$ с$^{-1}$.

Определить реакции подпятника A и подшипника B.

Решение. Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала AB, стержня OD и груза, и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом оси Bxy так, чтобы стержень лежал в плоскости xy, и изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ реакции подпятника и реакцию $\overline{X}_B$ подшипника.

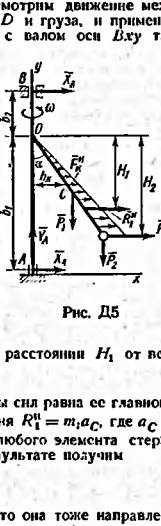

Рис. Д5

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня и груза, считая груз материальной точкой. Так как вал вращается равномерно ($\omega = \text{const}$), то его элементы имеют только нормальные ускорения $\overline{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k — расстояние элемента от оси. Тогда силы инерции $\overline{F}_k^н$ будут направлены от оси вращения и численно $F_k^н = \Delta m \cdot a_{nk} = \Delta m \cdot \omega^2 h_k$, где Δm — масса элемента. Поскольку все $\overline{F}_k^н$ пропорциональны h_k, то эпюра этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей $\overline{R}_1^н$, линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника, т. е. на расстоянии H_1 от вершины O, где $H_1 = \frac{2}{3} H_2$ ($H_2 = l \cos\alpha$).

Но, как известно, равнодействующая любой системы сил равна ее главному вектору, а численно главный вектор сил инерции стержня $R_1^н = m_1 a_C$, где a_C — ускорение центра масс стержня; при этом, как и для любого элемента стержня, $a_C = a_{Cn} = \omega^2 h_C = \omega^2 \cdot OC \cdot \sin\alpha$ ($OC = l/2$). В результате получим

$$R_1^н = m_1 \omega^2 \frac{l}{2} \sin\alpha = 13{,}5 \text{ Н}.$$

Аналогично для силы инерции $\overline{F}_2^н$ груза найдем, что она тоже направлена от оси вращения, а численно $F_2^н = m_2 \omega^2 l \sin\alpha = 18$ Н.

Так как все действующие силы и силы инерции лежат в плоскости xy, то и реакции подпятника A и подшипника B тоже лежат в этой плоскости, что было учтено при их изображении.

По принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составляя для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим:

$$\sum F_{kx} = 0;\ X_A + X_B + R_1^н + F_2^н = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ Y_A - P_1 - P_2 = 0, \tag{2}$$

$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0;\ X_A (b_1 + b_2) - P_1 \frac{l}{2} \sin\alpha - P_2 l \sin\alpha + R_1^н (H_1 + b_2) + F_2^н (H_2 + b_2) = 0. \tag{3}$$

Подставив сюда числовые значения всех заданных и вычисленных величин и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции. Ответ: $X_A = -11{,}8$ Н, $Y_A = 49{,}1$ Н, $X_B = -19{,}7$ Н. Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$ и $\overline{X}_B$ направлены противоположно показанным на рис. Д5.

Задача Д6

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится в равновесии под действием приложенных сил: положение равновесия определяется углами α, β, γ, φ, θ (рис. Д6.0 — Д6.9, табл. Д6). Длины стержней механизма (кривошипов или коромысел) равны: $l_1 = 0{,}4$ м, $l_4 = 1{,}0$ м (размеры l_2 и l_3 произвольны); точка E на рис. 2 — 6 находится в середине соответствующего стержня.

На механизм действуют: на рис. 0—2 — сила $\overline{F}$, приложенная к ползуну D, и пара сил с моментом M, приложенная к стержню 1; на рис. 3—9 — пары сил с моментами M_1 и M_2, приложенные к стержням 1 и 4.

Система уравновешивается параллельной Bb силой $\overline{Q}$, приложенной к ползуну B. Определить, чему равна и в какую сторону направлена эта сила.

Указания. Задача Д6 — на определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений. Механизм в рассматриваемой задаче имеет одну степень свободы, так как имеет одно независимое возможное перемещение. Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар на этом перемещении и приравнять ее нулю. После этого надо выразить все вошедшие в составленное уравнение элементарные перемещения через какое-нибудь одно и определить искомую силу.

Таблица Д6

Номер условия	Углы					Рис. 0—2		Рис. 3—9	
	$\alpha°$	$\beta°$	$\gamma°$	$\varphi°$	$\theta°$	M, Н·м	F, Н	M_1, Н·м	M_2, Н·м
0	60	60	60	90	120	150	140	100	560
1	90	120	90	90	60	100	130	120	520
2	60	150	120	90	30	150	120	140	480
3	30	150	120	0	60	100	110	160	440
4	0	120	90	0	45	150	100	180	400
5	30	120	30	0	60	100	90	200	360
6	30	120	120	0	60	150	80	220	320
7	0	150	30	0	60	100	70	240	280
8	0	60	30	0	120	150	60	260	240
9	90	150	120	90	30	100	50	280	200

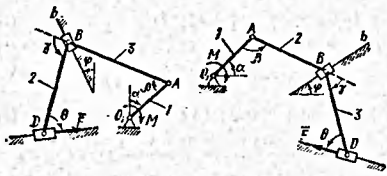

Рис. Д6.0 Рис. Д6.1 Рис. Д6.2

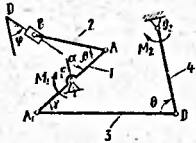

Рис. Д6.3

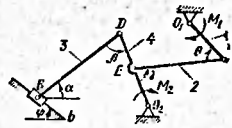

Рис. Д6.4

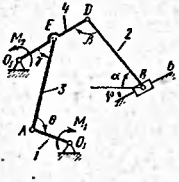

Рис. Д6.5

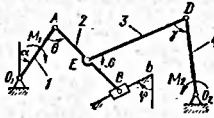

Рис. Д6.6

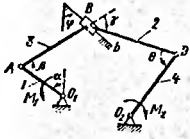

Рис. Д6.7

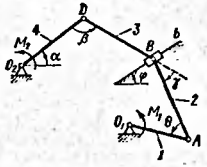

Рис. Д6.8

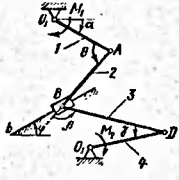

Рис. Д6.9

Пример Д6. Механизм (рис. Д6, *а*), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами. Механизм находится в равновесии под действием двух пар сил с моментами M_1, M_2, приложенных к стержням (кривошипам) *1, 4*, и силы $\bar{Q}$, приложенной к ползуну *B*.

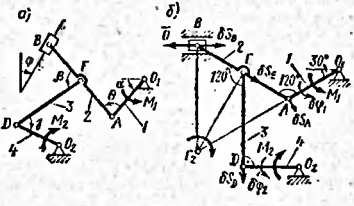

Рис. Д6

Дано: $\alpha = 30°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 90°$, $\theta = 120°$, $l_1 = 0{,}6$ м, $l_4 = 0{,}3$ м, $AE = BE$, $M_1 = 220$ Н·м, $M_2 = 500$ Н·м.

Определить: величину и направление силы $\overline{Q}$.

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. Д6, *б*). Для определения силы Q воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\sum \delta A_k^a = 0, \tag{1}$$

где δA_k^a — элементарные работы активных сил на соответствующих возможных перемещениях. Изображаем действующие на механизм активные силы: силу $\overline{Q}$ (направлением задаемся) и пары с моментами M_1 и M_2.

2. Чтобы составить уравнение (1), сообщим механизму возможное перемещение и покажем на чертеже перемещения звеньев, к которым приложены активные силы, обозначив: $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ — повороты стержней *1* и *2* вокруг осей O_1 и O_2 соответственно, δs_B — перемещение ползуна (точки) B.

Механизм имеет одну степень свободы; поэтому из перемещений $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, δs_B произвольно можно задаться только одним. Примем за независимое возможное перемещение $\delta\varphi_1$ и установим, какими тогда будут перемещения δs_B и $\delta\varphi_2$, выразив их одновременно через $\delta\varphi_1$. При этом важно верно определить и направления δs_B, $\delta\varphi_2$, так как иначе в уравнении (1) будут ошибки в знаках. При расчетах учтем, что зависимость между возможными перемещениями здесь будет такой же, какая была бы между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении, и воспользуемся известными из кинематики соотношениями. (См. пример К2.)

Сначала найдем и изобразим δs_A (направление δs_A определяется направлением $\delta\varphi_1$); получим:

$$\delta s_A = l_1\delta\varphi_1, \ \delta s_A \perp O_1A. \tag{2}$$

Теперь определим и изобразим δs_B, учитывая, что проекции δs_B и δs_A на прямую BA должны быть равны друг другу (иметь и одинаковые знаки!). Тогда

$$\delta s_B \cos 30° = \delta s_A \cos 30° \text{ и } \delta s_B = \delta s_A = l_1\delta\varphi_1. \tag{3}$$

Чтобы определить $\delta\varphi_2$, найдем сначала δs_E и δs_D. Для этого построим мгновенный центр скоростей (вращения) C_2 стержня *2* (на пересечении перпендикуляров к δs_A и δs_B, восставленных из точек A и B) и по направлению δs_A установим, каково направление поворота вокруг центра C_2. Так как $\angle C_2AB = \angle C_2BA = 60°$, то $\triangle AC_2B$ равносторонний и C_2E в нем является высотой, поскольку $AE = BE$. Тогда перемещение δs_E, перпендикулярное C_2E, будет направлено по прямой EA в сторону, определяемую направлением поворота вокруг центра C_2. Воспользовавшись опять тем, что проекции δs_E и δs_A на прямую EA должны быть равны друг другу, получим (значение δs_E можно найти и из соответствующей пропорции):

$$\delta s_E = \delta s_A \cos 30° = l_1\delta\varphi_1 \cos 30°. \tag{4}$$

Так как точка D принадлежит одновременно стержню O_2D, имеющему в O_2 ось вращения, то $\delta s_D \perp O_2D$. Из условия равенства проекций δs_D и δs_E на прямую ED определяем, в какую сторону направлено δs_D и находим, что

$$\delta s_D = \delta s_E \cos 60° = l_1\delta\varphi_1 \cos 30° \cdot \cos 60°. \tag{5}$$

Наконец, по направлению δs_D определяем направление $\delta\varphi_2$ и находим при заданных значениях l_1 и l_4, что

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_D}{l_4} = \frac{l_1}{l_4}\cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ\, \delta\varphi_1 = 0{,}87\delta\varphi_1. \qquad (6)$$

3. Теперь, составив уравнение (1), получим

$$M_1\delta\varphi_1 - Q\delta s_B - M_2\delta\varphi_2 = 0$$

или, заменяя δs_B и $\delta\varphi_2$ их значениями (3) и (6) и вынося одновременно $\delta\varphi_1$ за скобки,

$$(M_1 - l_1 Q - 0{,}87M_2)\,\delta\varphi_1 = 0. \qquad (7)$$

Так как $\delta\varphi_1 \neq 0$, то, приравняв нулю выражение, стоящее в скобках, найдем Q. Ответ: $Q = -358$ Н; знак указывает, что направление силы $\bar{Q}$ противоположно показанному на рис. Д6.

Задача Д7

Механическая система состоит из шкивов *1* и *2*, обмотанных нитями, и грузов *3—5*, прикрепленных к этим нитям (рис. Д7.0—Д7.9, табл. Д7). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и двух пар сил: пары с моментом M_1, приложенной к шкиву *1*, и пары с моментом M_2, приложенной к шкиву *2*. Радиусы ступеней шкива *1* равны: $R_1 = 0{,}3$ м, $r_1 = 0{,}15$ м, а шкива *2* — $R_2 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}1$ м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно: $\rho_1 = 0{,}2$ м, $\rho_2 = 0{,}1$ м.

Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес: веса $P_1, \ldots, P_5$ шкивов и грузов заданы в таблице в ньютонах, а моменты — в ньютонометрах. Тот из грузов *3, 4, 5*, вес которого равен нулю, на чертеже не изображать; шкивы *1* и *2* всегда входят в систему.

Указания. Задача Д7 — на применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера — Лагранжа). Ход решения задачи такой же, как в задаче Д6, только предварительно надо присоединить к действующим на систему силам соответствующие силы инерции. Учесть при этом, что для однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (шкива), система сил инерции приводится к паре с моментом $M^{\text{ин}} = I_z\varepsilon$, где I_z — момент инерции тела относительно оси вращения, ε — угловое ускорение тела; направление $M^{\text{ин}}$ противоположно направлению ε.

Таблица Д7

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	M_1	M_2
0	10	0	20	0	30	0,3	0
1	0	30	20	10	0	0	0,4
2	0	20	0	30	10	0,6	0
3	30	0	10	20	0	0	0,6
4	10	0	0	30	20	0	0,2
5	0	10	30	0	20	0,3	0
6	0	30	0	10	20	0	0,6
7	20	0	30	0	10	0	0,2
8	0	10	20	30	0	0,3	0
9	20	0	0	10	30	0,6	0

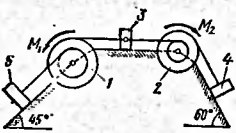

Рис. Д7.0

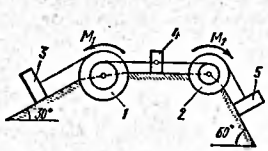

Рис. Д7.1

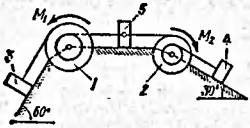

Рис. Д7.2

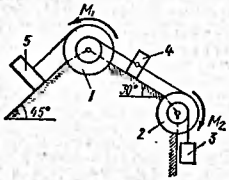

Рис. Д7.3

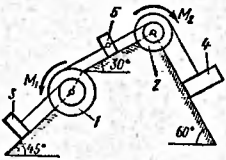

Рис. Д7.4

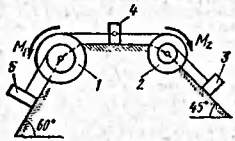

Рис. Д7.5

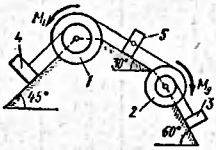

Рис. Д7.6

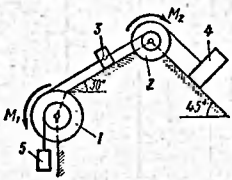

Рис. Д7.7

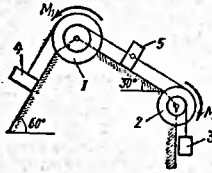

Рис. Д7.8

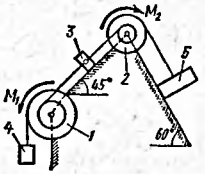

Рис. Д7.9

Пример Д7. Механическая система (рис. Д7) состоит из обмотанных нитями блока *1* радиуса R_1 и ступенчатого шкива *2* (радиусы ступеней R_2 и r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), а также из грузов *3* и *4*, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом *M*, приложенной к блоку *1*.

Дано: $P_1=0$, $P_2=30$ Н, $P_3=40$ Н, $P_4=20$ Н, $M=16$ Н·м, $R_1=0{,}2$ м, $R_2=0{,}3$ м, $r_2=0{,}15$ м, $\rho_2=0{,}2$ м.

Определить: ускорение груза *3*, пренебрегая трением.

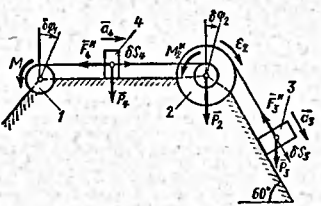

Рис. Д7

Решение. 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел *1*, *2*, *3*, *4*, соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, — идеальные. Для определения a_3 применим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^и = 0, \tag{1}$$

где $\sum \delta A_k^a$ — сумма элементарных работ активных сил; $\sum \delta A_k^и$ — сумма элементарных работ сил инерции.

2. Изображаем на чертеже активные силы $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$ и пару сил с моментом *M*. Задавшись направлением ускорения $\bar{a}_3$, изображаем на чертеже силы инерции $\bar{F}_3^и$, $\bar{F}_4^и$ и пару сил инерции с моментом $M_2^и$, величины которых равны:

$$F_3^и = \frac{P_3}{g} a_3,\ F_4^и = \frac{P_4}{g} a_4,\ M_2^и = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2. \tag{2}$$

3. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим

$$(P_3 \sin 60° - F_3^и)\,\delta s_3 - M_2^и \delta\varphi_2 - F_4^и \delta s_4 - M\delta\varphi_1 = 0. \tag{3}$$

Выразим все перемещения через $\delta\varphi_2$:

$$\delta s_3 = R_2\delta\varphi_2,\ \delta s_4 = r_2\delta\varphi_2,\ \delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1}\delta\varphi_2. \tag{4}$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду

$$\left[P_3\left(\sin 60^\circ-\frac{a_3}{g}\right)R_2-\frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2-\frac{P_4}{g}a_4r_2-M\frac{r_2}{R_1}\right]\delta\varphi_2=0. \qquad (5)$$

Входящие сюда величины ε_2 и a_4 выразим через искомую величину a_3:

$$\varepsilon_2=\frac{a_3}{R_2},\quad a_4=\varepsilon_2r_2=\frac{r_2}{R_2}a_3,$$

а затем, учтя, что $\delta\varphi_2\neq 0$, приравняем нулю выражение, стоящее в уравнении (5) в квадратных скобках. Из полученного в результате уравнения найдем

$$a_3=\frac{P_3R_2\sin 60^\circ-Mr_2/R_1}{P_3R_2+P_2\frac{\rho_2^2}{R_2}+P_4r_2^2/R_2}g.$$

Вычисления дают ответ: $a_3=-0{,}9$ м/с². Знак указывает, что ускорение груза *3* и ускорения других тел имеют направления, противоположные показанным на рис. Д7.

Задача Д8

Механическая система состоит из тел *1, 2, ..., 5* весом $P_1, P_2, \ldots, P_5$, связанных нитями, намотанными на ступенчатые блоки *1* и *2* (рис. Д8.0—Д8.9, табл. Д8). Прочерк в столбцах таблицы, где заданы веса, означает, что соответствующее тело в систему не входит (на чертеже не изображать.), а ноль — что тело считается невесомым, но в систему входит. Для колес, обозначенных номером *4*, P_4 — их общий вес (вес платформы такой тележки не учитывается).

Радиусы ступенчатых блоков *1* и *2* равны соответственно: $R_1=R$, $r_1=0{,}8R$; $R_2=R$, $r_2=0{,}4R$. При вычислении моментов инерции оба блока, колеса и катки считать однородными цилиндрами радиуса R.

На систему кроме сил тяжести действуют сила $\overline{F}$, приложенная к телу *4* или *5* (если тело *5* в систему не входит, сила приложена в точке *B* к тележке), и пары с моментами M_1 и M_2, приложенные к блокам; при $M<0$ направление момента противоположно показанному на рисунке.

На участке нити, указанном в таблице в столбце „Пружина", включена пружина с коэффициентом жесткости *c* (например, если в столбце стоит *AB*, то участок *AB* является пружиной, если *AD*, то *AD* — пружина, и т.д.); в начальный момент времени пружины не деформированы.

Составить для системы уравнения Лагранжа и определить из них частоту и период колебаний, совершаемых телами системы при ее движении.

Указания. Задача Д8 — на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет две степени свободы; следовательно, ее положение определяется двумя обобщенными координатами q_1, q_2 и для нее должны быть составлены два уравнения.

Решение начать с выбора обобщенных координат, обозначив их $q_1=x$ и $q_2=\varphi$ или $q_1=x$ и $q_2=y$. За координату x принять удлинение пружины, отсчитываемое в сторону того из тел *3, 4* или *5* системы, к которому пружина прикреплена, например, если пружина прикреплена к этому телу в точке *B* и ее длина в произвольный момент времени равна *AB*, то $x=AB-l_0$, где l_0 — длина недеформированной пружины. За координату φ принять угол поворота крайнего блока (этот блок может быть и невесомым), отсчитывая φ от начального положения. Если в систему ни один блок не входит (входят лишь тела *4* и *5*), за координату y принять расстояние тела *4* от начального положения. Соответствующие примеры даны на рис. Д8.10, *а, б, в*.

При таком выборе обобщенных координат искомая частота и период колебаний могут быть найдены из уравнения, определяющего зависимость $x=f(t)$. Дальнейший ход решения разъяснен в примере Д8.

Таблица Д8

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	F	M_1	M_2	Пружина
0	P	0	P	—	—	0	0	$-3PR$	KE
1	—	$2P$	—	$3P$	—	P	0	0	AB
2	$2P$	0	—	P	—	$2P$	0	0	AB
3	—	—	—	$3P$	$2P$	P	0	0	BD
4	P	—	$2P$	—	—	0	$-3PR$	0	KE
5	—	$2P$	—	P	—	0	0	$2PR$	AB
6	P	0	—	$2P$	—	0	$2PR$	0	AB
7	0	$2P$	P	—	—	0	0	$-2PR$	KE
8	0	P	—	$2P$	—	0	$3PR$	0	AB
9	—	0	—	$4P$	$3P$	0	0	$4PR$	BD

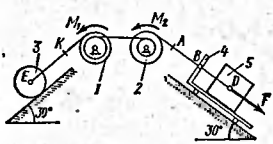

Рис. Д8.0

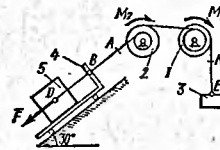

Рис. Д8.1

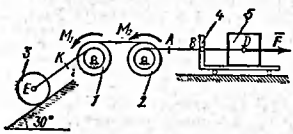

Рис. Д8.2

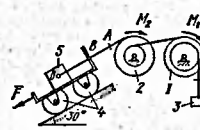

Рис. Д8.3

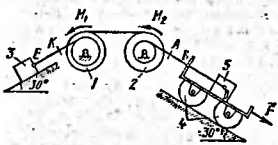

Рис Д8.4

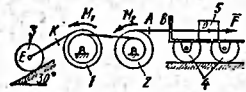

Рис. Д8.5

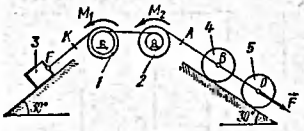

Рис. Д8.6

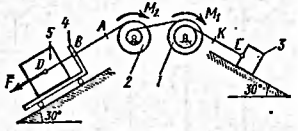

Рис. Д8.7

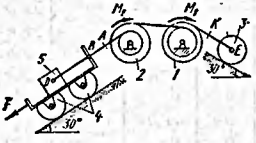

Рис. Д8.8

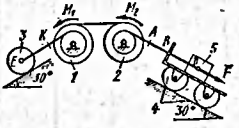

Рис. Д8.9

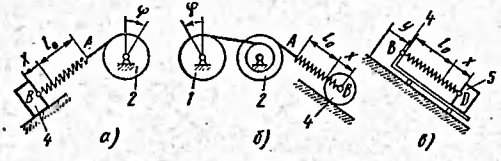

Рис. Д8.10

Пример Д8. Механическая система (рис. Д8) состоит из барабана *1* радиуса R, к которому приложена пара сил с моментом M, тележки *2* и катка *3* (барабан и каток однородные цилиндры); веса всех тел равны соответственно P_1, P_2 и P_3; весом колес тележки пренебрегаем. Тележка соединена с барабаном намотанной на него нитью, а с катком — пружиной BD, коэффициент жесткости которой равен c. Система начинает движение из состояния покоя; пружина в этот момент не деформирована.

Дано: R, c, $P_1 = 2P$, $P_2 = 4P$, $P_3 = 2P$, $M = 4PR$, $\alpha = 30°$.

Определить: частоту k и период τ колебаний, совершаемых телами системы при ее движении.

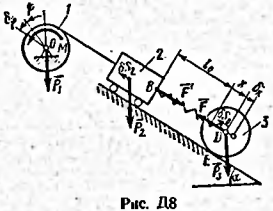

Рис. Д8

Решение. 1. Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота барабана φ и удлинение пружины x ($q_1 = \varphi$, $q_2 = x$). Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \qquad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{2}$$

Так как барабан вращается вокруг оси O, тележка движется поступательно, а каток — плоскопараллельно, то

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_2^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \omega_3^2, \tag{3}$$

где $I_O = (P_1/2g) R^2$, $I_D = (P_3/2g) R_3^2$ (R_3 — радиус катка 3).

Все входящие сюда скорости надо выразить через обобщенные скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{x}$. Очевидно, что $\omega_1 = \dot{\varphi}$, $v_2 = R\omega_1 = R\dot{\varphi}$. Для определения v_D рассмотрим движение катка как сложное. Учитывая, что x определяет положение точки D по отношению к тележке, получим $\bar{v}_D = \bar{v}_D^{\text{от}} + \bar{v}_D^{\text{пер}}$, где численно $v_D^{\text{от}} = \dot{x}$, $v_D^{\text{пер}} = v_2 = R\dot{\varphi}$. Тогда принимая во внимание, что при возрастании φ и x скорости $\bar{v}_D^{\text{от}}$ и $\bar{v}_D^{\text{пер}}$ направлены в разные стороны и что точка E для катка — мгновенный центр скоростей, получим

$$v_D = \dot{x} - R\dot{\varphi}, \quad \omega_3 = \frac{v_D}{ED} = \frac{\dot{x} - R\dot{\varphi}}{R_3}.$$

Подставляя все найденные значения скоростей и значения I_O и I_D в равенства (3) и учитывая, что $P_1 = P_3 = 2P$, а $P_2 = 4P$, получим окончательно из (2) следующее выражение для T:

$$T = \frac{P}{g}\left(4R^2\dot{\varphi}^2 - 3R\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2\right). \tag{4}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g}(8R^2\dot{\varphi} - 3R\dot{x}); \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P}{g}(-3R\dot{\varphi} + 3\dot{x});$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

3. Теперь определим обобщенные силы Q_1 и Q_2. Изображаем действующие на систему активные силы: силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, силы упругости $\bar{F}$ и $\bar{F}'$, где численно $F' = F = cx$, и пару с моментом M.

а) Для определения Q_1 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата φ получает приращение $\delta\varphi > 0$, а x не изменяется, т. е. $\delta x = 0$ (пружина при таком перемещении системы не изменяет свою длину). Тогда тележка и центр катка получат одинаковые перемещения $\delta s_2 = \delta s_D = R\delta\varphi$ и элементарная работа действующих сил будет равна

$$\delta A_1 = M\delta\varphi - P_2 \sin 30^\circ \delta s_2 - P_3 \sin 30^\circ \delta s_D - F'\delta s_2 + F\delta s_D.$$

Заменив здесь все величины их значениями, найдем в результате, что

$$\delta A_1 = (M - 0{,}5P_2R - 0{,}5P_3R)\,\delta\varphi = PR\delta\varphi. \tag{6}$$

б) Для определения Q_2 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата x получает приращение $\delta x > 0$, а φ не изменяется, т. е. $\delta\varphi = 0$ (барабан не поворачивается и тележка не перемещается). Тогда элементарную работу совершат только силы $\bar{P}_3$ и $\bar{F}$, и учтя, что $P_3 = 2P$, будем иметь

$$\delta A_2 = P_3 \sin 30^\circ \cdot \delta x - F\delta x = (P - cx)\,\delta x. \tag{7}$$

Коэффициенты при $\delta\varphi$ и δx в равенствах (6) и (7) и будут искомыми обобщенными силами; следовательно

$$Q_1 = PR,\ Q_2 = P - cx. \tag{8}$$

Подставляя величины (5) и (8) в уравнения (1), получим следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\frac{P}{g}(8R^2\ddot{\varphi} - 3R\ddot{x}) = PR, \qquad \frac{P}{g}(-3R\ddot{\varphi} + 3\ddot{x}) = P - cx. \tag{9}$$

4. Чтобы определить k и τ, исключим из уравнений (9) $\ddot{\varphi}$. Получим следующее дифференциальное уравнение свободных колебаний $15P\ddot{x} = 11Pg - 8cgx$ или

$$\ddot{x} + k^2x = \frac{11}{15}g, \text{ где } k^2 = \frac{8cg}{15P}. \tag{10}$$

Известно, что когда уравнение приведено к виду (10), то k в нем является круговой частотой, а период $\tau = 2\pi/k$. Следовательно, искомые величины имеют значения:

$$k = \sqrt{\frac{8cg}{15P}},\ \tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{15P}{8cg}}.$$

Задача Д9

Механическая система состоит из ступенчатых шкивов *1* и *2* весом P_1 и P_2 с радиусами ступеней $R_1 = R$, $r_1 = 0{,}4R$; $R_2 = R$, $r_2 = 0{,}8R$ (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу); грузов *3, 4* и сплошного однородного цилиндрического катка *5* весом P_3, P_4, P_5 соответственно (рис. Д9.0 — Д9.9, табл. Д9). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Грузы скользят по плоскостям без трения, а катки катятся без скольжения.

Кроме сил тяжести на одно из тел системы действует постоянная сила $\overline{F}$, а на шкивы *1* и *2* при их вращении действуют постоянные моменты сил сопротивления, равные соответственно M_1 и M_2.

Составить для данной системы уравнение Лагранжа и определить из него величину, указанную в таблице в столбце „Найти", где обозначено: ε_1, ε_2 — угловые ускорения шкивов *1* и *2*, a_3, a_4, a_{C5} — ускорения грузов *3, 4* и центра масс катка *5* соответственно. Когда в задаче надо определить ε_1 или ε_2, считать $R = 0{,}25$ м.

Тот из грузов *3,4*, вес которого равен нулю, на чертеже не изображать. Шкивы *1* и *2* всегда входят в систему.

Указания. Задача Д9 — на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет одну степень свободы, следовательно, ее положение определяется одной обобщенной координатой и для нее должно быть составлено одно уравнение.

За обобщенную координату q принять: в задачах, где требуется определить a_3, a_4 или a_{C5}, — перемещение x соответствующего груза или центра масс C_5 катка *5*; в задачах, где требуется определить ε_1 или ε_2, — угол поворота φ соответствующего шкива.

Для составления уравнения вычислить сначала кинетическую энергию T системы (как в задаче Д4) и выразить все вошедшие в T скорости через обобщенную скорость, т.е. через $\dot{x}$, если обобщенная координата x, или через $\dot{\varphi}$, если обобщенная координата φ. Затем вычислить обобщенную силу Q. Для этого сообщить системе возможное (малое) перемещение, при котором выбранная координата, т.е. x (или φ), получает положительное приращение δx (или $\delta\varphi$), и вычислить сумму элементарных работ всех сил на этом перемещении; в полученном равенстве надо все другие элементарные перемещения выразить

через δx (или через $\delta\varphi$, если обобщенная координата φ) и вынести δx (или $\delta\varphi$) за скобки. Коэффициент при δx (или $\delta\varphi$) и будет обобщенной силой Q (см. еще пример Д9).

Таблица Д9

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	M_1	M_2	F	Найти
0	$12P$	0	P	0	$3P$	$0{,}2PR$	0	$8P$	a_3
1	0	$10P$	0	$4P$	$2P$	0	$0{,}3PR$	$6P$	ε_2
2	$10P$	0	0	$2P$	P	$0{,}3PR$	0	$4P$	ε_1
3	0	$12P$	$2P$	0	$3P$	0	$0{,}2PR$	$10P$	a_3
4	$8P$	$10P$	0	0	$2P$	0	$0{,}3PR$	$5P$	a_{C5}
5	$12P$	0	$2P$	0	P	0	$0{,}4PR$	$8P$	ε_1
6	0	$12P$	0	$3P$	$4P$	$0{,}2PR$	0	$6P$	a_4
7	$10P$	$8P$	0	0	$2P$	$0{,}3PR$	0	$5P$	ε_2
8	$12P$	0	0	$5P$	$4P$	0	$0{,}2PR$	$6P$	a_4
9	0	$12P$	$2P$	0	$3P$	$0{,}2PR$	0	$10P$	a_{C5}

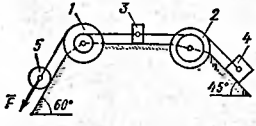

Рис. Д9.0

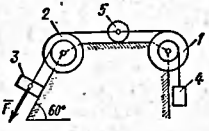

Рис. Д9.1

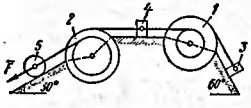

Рис. Д9.2

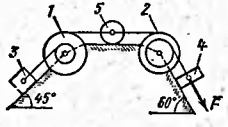

Рис. Д9.3

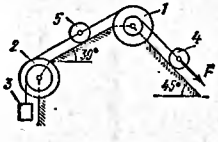

Рис. Д9.4

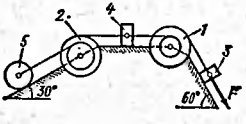

Рис. Д9.5

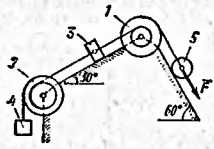

Рис. Д9.6

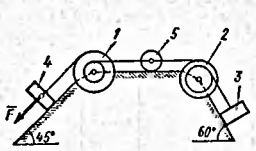

Рис. Д9.7

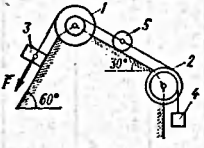

Рис. Д9.8

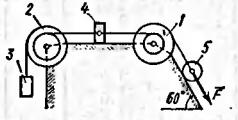

Рис. Д9.9

Пример Д9. Механическая система состоит из ступенчатого шкива *2* (радиусы ступеней R_2 и r_2), груза *1* и сплошного катка *3*, прикрепленных к концам нитей, намотанных на ступени шкива (рис. Д9). На шкив при его вращении действует момент сил сопротивления M_2. Массу шкива считать равномерно распределенной по внешнему ободу.

Дано: $R_2 = R$, $r_2 = 0{,}6R$, $P_1 = 6P$, $P_2 = 3P$, $P_3 = 5P$, $M_2 = 0{,}2PR$, $\alpha = 30°$.

Определить: a_1 — ускорение груза *1*.

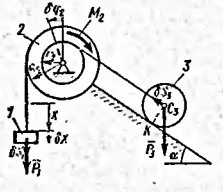

Рис. Д9

Решение. 1. Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение x груза *1* ($q = x$), полагая, что груз движется вниз, и отсчитывая x в сторону движения; составим уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q. \qquad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2)$$

Так как груз *1* движется поступательно, шкив *2* вращается вокруг неподвижной оси, а каток *3* движется плоскопараллельно, то

$$T_1 = \frac{P_1}{2g} v_1^2,\ T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2,\ T_3 = \frac{P_3}{2g} v_{C3}^2 + \frac{1}{2} I_{C3} \omega_3^2, \qquad (3)$$

где, поскольку масса шкива считается распределенной по внешнему ободу, а каток — сплошной (его радиус обозначим r_3),

$$I_2 = \frac{P_2}{g} R^2,\ I_{C3} = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} r_3^2. \qquad (4)$$

3. Все скорости, входящие в T_1, T_2 и T_3, выразим через обобщенную скорость $\dot{x}$, равную, очевидно, v_1. Если при этом учесть, что $v_1 = \omega_2 R_2$, а $v_{C3} = \omega_2 r_2$ и что точка K является для катка 3 мгновенным центром скоростей, то получим:

$$v_1 = \dot{x}, \quad \omega_2 = \frac{v_1}{R} = \frac{\dot{x}}{R}, \quad v_{C3} = \omega_2 r_2 = \frac{r_2}{R}\dot{x},$$

$$\omega_3 = \frac{v_{C3}}{KC_3} = \frac{v_{C3}}{r_3} = \frac{r_2}{r_3 R}\dot{x}. \tag{5}$$

Подставляя величины (5) и (4) в равенства (3), а затем значения T_1, T_2, T_3 в равенство (2), найдем окончательно, что

$$T = \frac{1}{2g}\left(P_1 + P_2 + \frac{3}{2}\frac{r_3^2}{R^2}P_3\right)\dot{x}^2, \text{ или } T = \frac{11{,}7P}{2g}\dot{x}^2. \tag{6}$$

Так как здесь T зависит только от $\dot{x}$, то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 11{,}7\frac{P}{g}\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 11{,}7\frac{P}{g}\ddot{x}. \tag{7}$$

4. Найдем обобщенную силу Q. Для этого изобразим силы, совершающие при движении системы работу, т. е. силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_3$ и момент сил сопротивления M_2, направленный против вращения шкива. Затем сообщим системе возможное (элементарное) перемещение, при котором обобщенная координата x получает положительное приращение δx, и покажем перемещения каждого из тел: для груза 1 это будет $\delta s_1 = \delta x$, для шкива 2 — поворот на угол $\delta\varphi_2$, для катка 3 — перемещение δs_3 его центра. После этого вычислим сумму элементарных работ сил и момента на данных перемещениях. Получим

$$\delta A = P_1\delta s_1 - M_2\delta\varphi_2 - P_3\sin\alpha \cdot \delta s_3. \tag{8}$$

Все входящие сюда перемещения надо выразить через δx. Учтя, что зависимости между элементарными перемещениями здесь аналогичны зависимостям (5) между соответствующими скоростями, получим

$$\delta s_1 = \delta x, \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{R}, \quad \delta s_3 = r_2\delta\varphi_2 = \frac{r_2}{R}\delta x. \tag{9}$$

Подставляя эти значения в равенство (8) и вынося δx за скобки, найдем, что

$$\delta A = \left(P_1 - \frac{M_2}{R} - \frac{r_2}{R}P_3\sin\alpha\right)\delta x. \tag{10}$$

Коэффициент при δx в полученном выражении и будет обобщенной силой Q. Следовательно,

$$Q = P_1 - \frac{M_2}{R} - \frac{r_2}{R}P_3\sin\alpha \text{ или } Q = 4{,}3\,P. \tag{11}$$

5. Подставляя найденные величины (7) и (11) в уравнение (1), получим

$$11{,}7\frac{P}{g}\ddot{x} = 4{,}3P.$$

Отсюда находим искомое ускорение $a_1 = \ddot{x}$. Ответ: $a_1 = 0{,}37g$.

Примечание. Если в ответе получится $a < 0$ (или $\varepsilon < 0$), то это означает, что система движется не в ту сторону, куда было предположено. Тогда у момента M, направленного против вращения шкива, изменится направление и, следовательно, как видно из равенства (11), изменится величина Q, для которой надо получить свое верное значение.

СОДЕРЖАНИЕ

Людмила Ивановна Котова, Раиса Ивановна Надеева, Семен Михайлович Тарг, Василий Львович Цывильский, Инна Мироновна Шмарова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и контрольные задания

Зав. редакцией К. И. Аношина
Редактор О. Г. Полобелова
Мл. редактор С. В. Мочкин
Художественный редактор Т. А. Дурасова
Технический редактор З. В. Нужина
Корректор В. А. Орлова

Н/К

Изд. № ОТ—409. Сдано в набор 13.01.82. Подписано в печать 24.12.82. Формат 60×90 1/16. Бум. дип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 4 усл. печ. л. Уч. кр.-отт. 4,13. Уч.-изд. л. 4,31. Тираж 31500 экз. Зак. № 545. Цена 10 коп.

Издательство „Высшая школа", Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Республиканская ордена «Знак Почета» типография имени П. Ф. Анохина Государственного комитета Карельской АССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 185630. Петрозаводск, ул. «Правды», 4